



Математика

4 единицы обучения – первый вопросник

Указания

- а. Продолжительность экзамена: 3 часа 30 минут.
- б. Строение вопросника и ключ к оценке:
в этом вопроснике три раздела, и в них восемь вопросов.
Раздел первый – статистика и теория вероятностей
Раздел второй – геометрия
Раздел третий – дифференциальное и интегральное
исчисление полиномов, рациональных функций и функций,
содержащих корни
Вы должны ответить на пять вопросов, по меньшей мере
на один вопрос из каждого раздела $5 \times 20 = 100$ баллов.
- в. Разрешенный вспомогательный материал:
1. Калькулятор без графического дисплея. При работе с калькулятором, в котором есть возможности программирования, запрещается использовать эти возможности. Использование калькулятора с графическим дисплеем или возможностей программирования может привести к тому, что экзамен будет аннулирован.
 2. Листы с формулами (прилагаются).
 3. Двухязычный словарь.
- г. Особые указания:
1. Не переписывайте вопрос;
укажите только его номер.
 2. Начинайте ответ на каждый вопрос с новой страницы.
Запишите в тетради этапы решения (также и в том случае, когда вычисления производились с помощью калькулятора). Объясните все свои действия, включая вычисления, подробно, ясно и упорядоченно.
Недостаточно подробная запись решения может привести к тому, что оценка будет снижена или экзамен будет аннулирован.

מתמטיקה

4 יחידות לימוד – שאלון ראשון

הוראות

- א. משך הבחינה: שלוש שעות וחצי.
- ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה:
בשאלון זה שלושה פרקים, ובהם שמונה שאלות.
פרק ראשון – סטטיסטיקה והסתברות
פרק שני – גאומטרייה
פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי
של פולינומים, של פונקציות רציונליות ושל
פונקציות שורש
יש לענות על חמש שאלות, על שאלה אחת
לפחות מכל פרק – $5 \times 20 = 100$ נקודות.
- חומר עזר מותר בשימוש:
1. מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון שיש בו אפשרות לתכנות. שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.
 2. דפי נוסחאות (מצורפים).
 3. מילון עברי-לועזי/לועזי-עברי.
- ד. הוראות מיוחדות:
1. אין להעתיק את השאלה;
יש לסמן את מספרה בלבד.
 2. יש להתחיל כל שאלה בעמוד חדש.
יש לרשום במחברת את שלבי הפתרון, גם
כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.
יש להסביר את כל הפעולות, כולל חישובים,
בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.
חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או
לפסילת הבחינה.

יש לכתוב במחברת הבחינה בלבד. יש לרשום "טיוטה" בראש כל עמוד המשמש טיוטה.
כתיבת טיוטה בדפים שאינם במחברת הבחינה עלולה לגרום לפסילת הבחינה.

Пишите только в экзаменационной тетради. Напишите слово «טיוטה» в начале каждой страницы, отведенной
вами под черновик. Выполнение черновых записей на листах, не относящихся к экзаменационной тетради, может
привести к тому, что экзамен будет аннулирован.

Вопросы

Ответьте на пять из вопросов 1–8, по меньшей мере на один вопрос из каждого раздела (за каждый вопрос – 20 баллов).

Обратите внимание: если вы ответите более чем на пять вопросов, будут проверены только первые пять ответов в вашей тетради.

Раздел первый – статистика и теория вероятностей

1. Оценки на экзамене по психометрии в определенном году распределились согласно нормальному закону [התפלגו נורמלית] со средней [ממוצע] оценкой 550 .

В этом году Лимор сдавала экзамен по психометрии.

Лимор получила за экзамен 686 баллов, а ее стандартизированная оценка [ציין התקן] была 1.6 .

(*) Найдите среднеквадратичное отклонение [סטיית תלך] полученных на экзамене оценок.

Проходной балл – это минимальная оценка, которую нужно получить за экзамен, чтобы поступить на тот или иной факультет.

В приведенной ниже таблице указаны проходные баллы для поступления на филологический факультет и проходной балл для поступления на факультет психологии в одном университете.

	Филологический факультет	Факультет психологии
Проходной балл	584	669

Яэль также сдавала экзамены в этом году. Известно, что 57.9% абитуриентов получили оценку ниже, чем оценка Яэль.

(*) Может ли Яэль поступить на филологический факультет? Обоснуйте свой ответ.

(*) (1) Найдите процент абитуриентов, которые могут поступить на факультет психологии.

(2) Найдите процент абитуриентов, которые могут поступить на филологический факультет, но не могут поступить на факультет психологии.

Известно, что 8448 абитуриентов могут поступить на филологический факультет, но не могут поступить на факультет психологии.

(*) Согласно таблице нормального распределения, сколько абитуриентов могут поступить на факультет психологии?

2. Диетолог проанализировал связь между максимальной температурой в Иерусалиме в некоторый день (переменная x) и потреблением воды в этот же день жителем Иерусалима Йоси (переменная y).

В таблице ниже приведены данные, полученные диетологом за 6 дней наблюдений.

Максимальная температура (в градусах Цельсия) – переменная x	Потребление воды Йоси (в литрах) – переменная y
20	1.6
22	1.7
24	2.4
26	2.7
28	2.9
30	3.1

- (א) (1) Найдите среднее [אמצע] значение максимальной температуры за 6 дней наблюдений.
(2) Найдите среднеквадратичное отклонение [סטיית הלקן] максимальной температуры за 6 дней наблюдений.

Диетолог провел вычисления и выяснил, что среднее значение потребления воды Йоси в течение 6 дней наблюдений равно 2.4 литра, а среднеквадратичное отклонение потребления им воды равно $\frac{7\sqrt{6}}{30}$ литров.

- (ב) Найдите коэффициент корреляции [מקדם המתאם] r между двумя этими переменными.
(ג) Найдите уравнение линии регрессии [ישר רגרסיה] для предсказания y по x .

Диетолог умножил на 3 количество ежедневно потребляемой Йоси воды (переменная y), чтобы оценить потребление воды его семьей.

- (ד) Для каждого из показателей I, II, приведенных ниже, определите: увеличилось, уменьшилось или не изменилось его значение после умножения.

Обоснуйте свой ответ.

I. Среднее значение переменной y .

II. Среднеквадратичное отклонение переменной y .

- (ה) Найдите угловой коэффициент линии регрессии для предсказания y по x после умножения. Обоснуйте свой ответ.

3. В одном поселке поощряют сортировку семьями бутылок из стекла, пластиковых упаковок и прочих неорганических отходов для переработки. В этом поселке поощряют также волонтерскую деятельность семей в органах местного самоуправления.

В ходе опроса, проведенного среди всех семей этого поселка, выяснилось, что часть семей сортирует неорганические отходы для переработки, а остальные семьи не занимаются этим. Также часть семей этого поселка участвует в волонтерской деятельности, а остальные – нет. Случайным образом выбирают семью из этого поселка. Вероятность, что эта семья сортирует отходы, на 0.44 больше вероятности того, что данная семья не сортирует их.

$\frac{5}{9}$ семей, занимающихся сортировкой отходов – волонтеры.

- (*) (1) Найдите процент семей в этом поселке, которые занимаются сортировкой отходов.
(2) Найдите процент семей в этом поселке, которые и сортируют отходы, и участвуют в волонтерской деятельности.

Число семей в этом поселке, которые и сортируют отходы, и участвуют в волонтерской деятельности, в 5 раз больше числа семей, которые не сортируют отходы и не участвуют в волонтерской деятельности.

- (*) Случайным образом выбирают семью из этого поселка. Какова вероятность, что эта семья – волонтеры?
(*) Случайным образом выбирают семью волонтеров из этого поселка. Какова вероятность, что эта семья не сортирует отходы?

В этом поселке живет 750 семей.

- (*) Найдите, сколько семей в этом поселке сортируют отходы или участвуют в волонтерской деятельности.

Раздел второй – геометрия

4. На чертеже справа изображен треугольник ABC , вписанный в окружность. AC – диаметр этой окружности.

Вершина A лежит на оси y ,

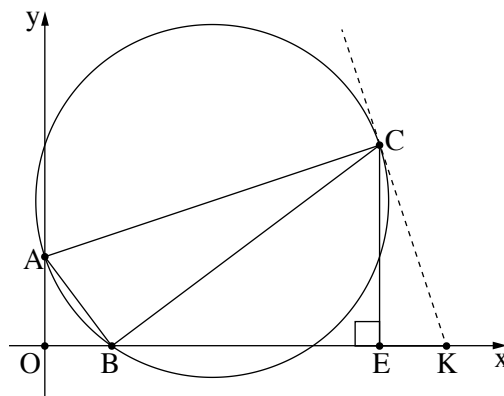
а вершина B лежит на оси x .

Через точку C провели перпендикуляр к оси x ,
 пересекающий ее в точке E .

Точка O – начало координат.

(*) (1) Докажите, что $\sphericalangle ABO = \sphericalangle BCE$.

(2) Докажите, что $\triangle AOB \sim \triangle BEC$.



Известно, что коэффициент подобия между треугольником BEC и треугольником AOB равен 3 и что $A(0,12)$, $B(9,0)$.

(*) (1) Найдите длину стороны BE .

(2) Найдите координаты вершины C .

Через точку C провели касательную к окружности.

(*) Найдите уравнение этой касательной.

Точка K – это точка пересечения касательной с осью x .

(*) Вычислите площадь четырехугольника $ABKC$.

5. На чертеже справа изображен дельтоид [דלתון] $ABCD$ ($AB = CB$, $AD = CD$).

Вершина C находится во втором квадранте.

Сторона BC параллельна оси x .

Дано: $A(-3, 2)$, $B(0, 6)$.

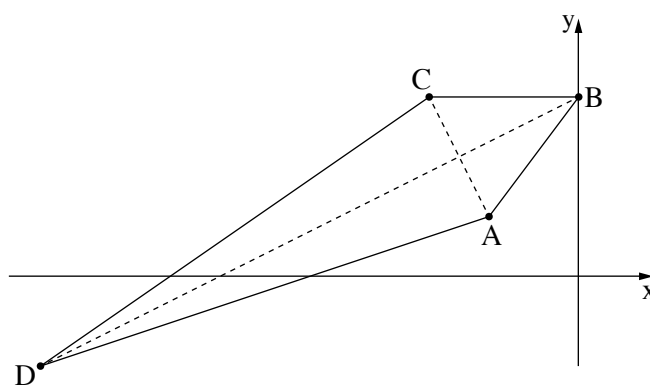
(*) (1) Найдите длину стороны AB .

(2) Найдите координаты вершины C .

(*) Найдите уравнение диагонали DB .

Дано уравнение стороны AD : $y = \frac{1}{3}x + 3$.

(*) Найдите координаты вершины D .



Точка M – пересечение диагоналей данного дельтоида.

(*) Найдите величину угла ADM .

Точка E – середина стороны DC .

(*) Вычислите площадь треугольника ADE .

Раздел третий – дифференциальное и интегральное исчисление полиномов, рациональных функций и функций, содержащих корни

6. Дана функция $f(x) = \frac{a}{(x-4)^2}$, определенная в области $x \neq 4$.

a – положительный параметр.

Известно, что в точке с координатой $x = 6$ угловой коэффициент касательной к графику функции $f(x)$ равен -3 .

(**ж**) Найдите значение a .

Подставьте $a = 12$ и ответьте на вопросы пунктов (з)–(н).

(**з**) (1) Найдите координаты точек пересечения графика функции $f(x)$ с осями координат (если таковые существуют).

(2) Найдите уравнения асимптот функции $f(x)$, перпендикулярных осям координат.

(3) Найдите области возрастания и убывания функции $f(x)$.

(**д**) Начертите схематический график функции $f(x)$.

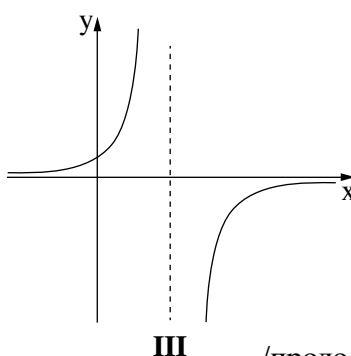
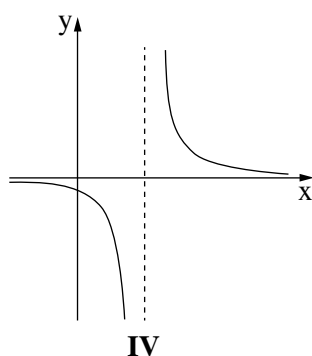
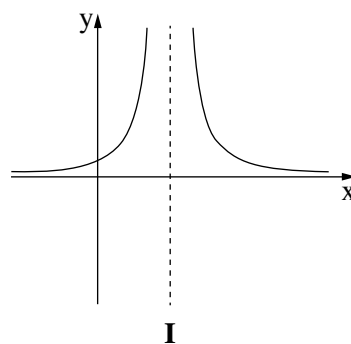
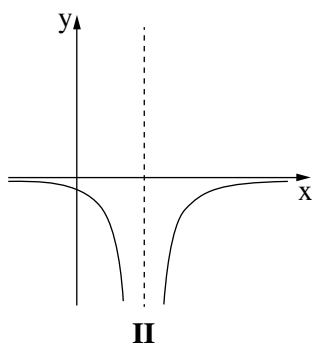
Область определения производной $f'(x)$ совпадает с областью определения функции $f(x)$.

(**т**) (1) Определите, какой из графиков I–IV в конце этого вопроса соответствует графику производной $f'(x)$.

(2) Вычислите площадь фигуры, ограниченной графиком производной $f'(x)$, прямой $x = 3$, осью x и осью y .

Дана функция $g(x) = f'(x) + 2$.

(**н**) На сколько площадь фигуры, ограниченной графиком функции $g(x)$, прямой $x = 3$, осью x и осью y , больше площади, вычисленной вами в пункте **т**(2)? Обоснуйте свой ответ.



7. Дана функция $f(x) = x^2 \cdot \sqrt{7-x}$.

- (*) (1) Найдите область определения функции $f(x)$.
- (2) Найдите координаты точек пересечения графика функции $f(x)$ с осью x .
- (3) Найдите координаты всех точек экстремума функции $f(x)$ и определите их тип.
- (*) Начертите схематический график функции $f(x)$.

Дана функция $g(x) = f(x+a)$, a – параметр.

Известно, что у функции $g(x)$ есть внутренняя точка максимума в точке с координатой $x = 8.6$.

- (*) (1) Найдите значение a . Обоснуйте свой ответ.
- (2) Какова область определения функции $g(x)$?

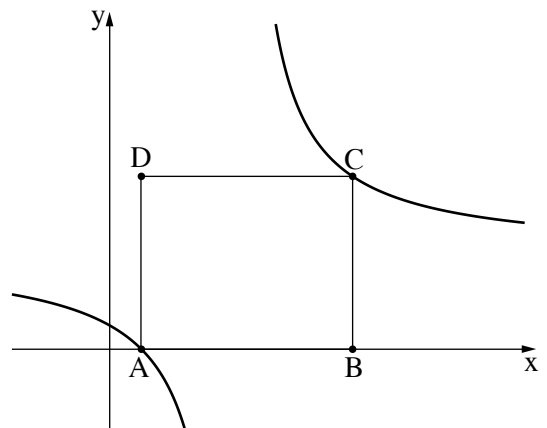
8. На чертеже ниже изображен график функции $f(x) = \frac{6x-12}{x-8}$.

- (*) (1) Найдите область определения функции $f(x)$.
- (2) Найдите уравнения асимптот функции $f(x)$, перпендикулярных осям координат.

Точка A – это точка пересечения графика функции $f(x)$ с осью x .

- (*) Найдите координаты точки A .

Точка C лежит на графике функции $f(x)$ в области $x > 8$.



Из точки C провели перпендикуляр к оси x , пересекающий ее в точке B .

Точка D – такая точка в первом квадранте, что $ABCD$ является прямоугольником.

Обозначим через t координату x точки C .

- (*) Выразите при помощи t периметр прямоугольника $ABCD$.
- (*) Найдите значение t , для которого периметр прямоугольника $ABCD$ будет минимальным.
- (*) Возможно ли, что периметр прямоугольника $ABCD$ равен 50? Обоснуйте свой ответ.

Желаем успеха!

Авторские права принадлежат Государству Израиль.
Копировать или публиковать можно только
с разрешения Министерства просвещения.

בהצלחה!

זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל
אין להעתיק או לפרסם
אלא ברשות משרד החינוך