

Обратите внимание: в этом вопроснике есть специальные инструкции. Отвечайте на вопросы, следуя этим инструкциям.

שימו לב: בבחינה זו יש הנחיות מיוחדות. יש לענות על השאלות על פי הנחיות אלה.

Математика

5 единиц обучения – первый вопросник

מתמטיקה

5 יחידות לימוד – שאלון ראשון

Указания

а. Продолжительность экзамена: 4 часа 30 минут

б. Строение вопросника и ключ к оценке:

В этом вопроснике четыре раздела, и в них восемь вопросов.

Раздел первый – короткие вопросы

Раздел второй – последовательности и теория вероятности

Раздел третий – геометрия и тригонометрия на плоскости

Раздел четвертый – дифференциальное и интегральное

исчисление полиномов, функций, содержащих корни,

рациональных функций и тригонометрических функций

Вы должны ответить на четыре вопроса, по меньшей мере на

один вопрос из первого или второго раздела и по меньшей мере

на один вопрос из каждого из следующих разделов – третьего и

четвертого.

$4 \times 25 = 100$ баллов.

в. Разрешенный вспомогательный материал:

1. Калькулятор без графического дисплея. При работе

с калькулятором, в котором есть возможности

программирования, запрещается использовать эти

возможности. Использование калькулятора с графическим

дисплеем или возможностей программирования может

привести к тому, что экзамен будет аннулирован.

2. Листы с формулами (прилагаются).

3. Двухязычный словарь.

г. Особые указания:

1. Не переписывайте вопрос; отметьте только его номер.

2. Начинайте ответ на каждый вопрос с новой страницы.

Запишите в тетради этапы решения (также и в том случае,

когда вычисления производились с помощью калькулятора).

Объясните все свои действия, включая вычисления,

подробно, в ясной и упорядоченной форме. Недостаточно

подробная запись решения может привести к тому, что

оценка за экзамен будет снижена или экзамен будет

аннулирован.

יש לרשום "טיוטה" בראש כל עמוד המשמש טיוטה.

כתובת טיוטה בדפים שאינם במחברת הבחינה עלולה לגרום לפסילת הבחינה.

Пишите только в экзаменационной тетради. Напишите слово «טיוטה» в начале каждой страницы, отведенной вами под черновик. Выполнение любых черновых записей на листах, не относящихся к экзаменационной тетради, может привести к тому, что экзамен будет аннулирован.

Желаем успеха!

בהצלחה!

הוראות

א. משך הבחינה: ארבע שעות וחצי.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה:

בשאלון זה ארבעה פרקים, ובהם שמונה שאלות.

פרק ראשון – שאלות קצרות

פרק שני – סדרות והסתברות

פרק שלישי – גאומטריה וטריגונומטריה במישור

פרק רביעי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי

של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות

רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות

יש לענות על ארבע שאלות, על שאלה אחת

לפחות מן הפרק הראשון או השני ועל שאלה

אחת לפחות מכל אחד מן הפרקים השלישי

והרביעי.

$100 = 25 \times 4$ נקודות.

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

1. מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות

התכנות במחשבון שיש בו אפשרות תכנות.

שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות

במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.

2. דפי נוסחאות (מצורפים).

3. מילון עברי-לועזי / לועזי-עברי.

ד. הוראות מיוחדות:

1. אין להעתיק את השאלה;

יש לסמן את מספרה בלבד.

2. יש להתחיל כל שאלה בעמוד חדש.

יש לרשום במחברת את שלבי הפתרון,

גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת

מחשבון. יש להסביר את כל הפעולות, כולל

חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.

חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או

לפסילת הבחינה. יש לכתוב במחברת הבחינה בלבד.

Вопросы

Ответьте на четыре из вопросов 1–8, по меньшей мере на один вопрос из первого **или** второго раздела и по меньшей мере на один вопрос из каждого из следующих разделов – третьего и четвертого (за каждый вопрос – 25 баллов).

Обратите внимание! Если вы ответите более чем на четыре вопроса, будут проверены только первые четыре ответа в вашей тетради.

Раздел первый – короткие вопросы

1. Ответьте на два из четырех пунктов (а)–(г), приведенных ниже. Если вы ответите более чем на два пункта, будут проверены только первые два ответа в вашей тетради.

(а) Докажите методом математической индукции или другим способом, что приведенное ниже равенство выполняется для любого натурального n :

$$4 + 13 + \dots + \frac{5n^2 + 3n}{2} = \frac{n(n+1)(5n+7)}{6}$$

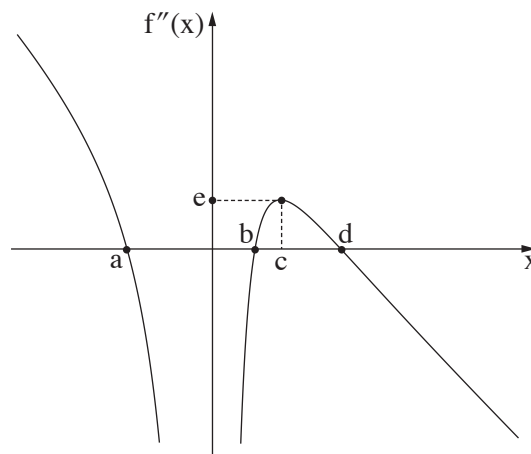
(б) Даны функции $f(x)$, $f'(x)$ и $f''(x)$, определенные для любого $x \neq 0$.

На чертеже справа представлен график второй производной $f''(x)$.

У графика $f''(x)$ есть три точки пересечения с осью x , их координаты $(a, 0)$, $(b, 0)$, $(d, 0)$.

Точка (c, e) – точка экстремума функции $f''(x)$.

(1) Выразите при помощи a, b, c, d, e , по мере необходимости, области возрастания и убывания производной $f'(x)$.



Дана функция $h(x)$, для которой выполняется: $h'(x) = f''(x) - e$.

Функция $h(x)$ определена для любого $x \neq 0$.

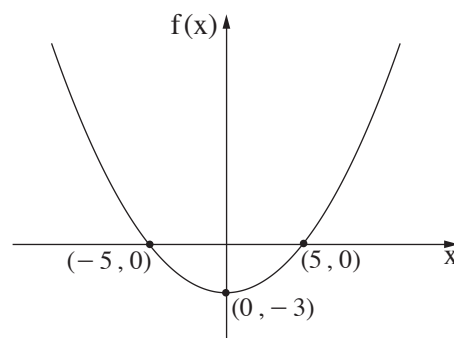
(2) Найдите, сколько точек экстремума и сколько точек перегиба есть у функции $h(x)$ (если таковые имеются). Обоснуйте свой ответ.

- (ג) На чертеже справа представлен график функции $f(x)$, на котором отмечены координаты точек пересечения графика функции $f(x)$ с осью x , а также координаты точки ее минимума.

Эта функция определена для любого x .

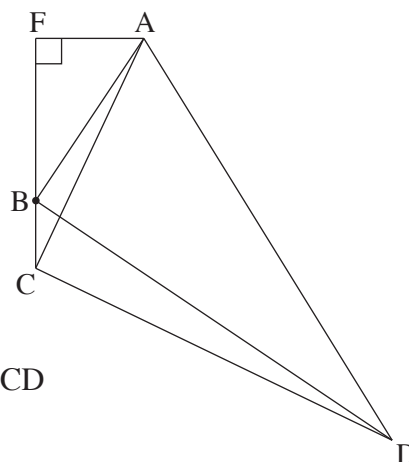
Даны функции: $g(x) = |f(x) + m|$, $h(x) = |f(x)| + m$.

m – параметр, $0 < m < 2$.



- (1) Выразите при помощи m , если необходимо, координаты точки максимума функции $g(x)$.
- (2) Выразите при помощи m , если необходимо, координаты точек экстремума функции $h(x)$ и определите их тип.
- (3) Ниже приведены два утверждения, I–II. Для каждого из этих утверждений определите, верно ли оно. Обоснуйте свои ответы.
 - I. Функции $g(x)$ и $h(x)$ положительны для любого значения x .
 - II. Для любого значения m в интервале $0 < m < 2$ выполняется:
прямая $y = m + \frac{1}{2}$ пересекает каждый из графиков функций $g(x)$ и $h(x)$ в трех точках.

- (ד) Четырехугольник $ABCD$ можно вписать в окружность таким образом, что AD будет диаметром окружности. Точка F – такая точка на продолжении стороны CB , что $FB \perp FA$, как показано на чертеже справа.



- (1) Докажите: $\triangle ACD \sim \triangle AFB$.

Дано: $\angle BDA = 24^\circ$.

- (2) Найдите отношение между площадью треугольника ACD и площадью треугольника AFB .

Раздел второй – последовательности и теория вероятности

2. Последовательность A – геометрическая прогрессия, ее члены $a_1, a_2, a_3 \dots$,
а ее знаменатель q , $-1 < q < 0$.

Дано: $a_1 = 1$.

Последовательность B определена для любого натурального n следующим образом:

$$b_n = a_n \cdot a_{n+2}.$$

- (⌘) Докажите, что последовательность B – геометрическая прогрессия, и выразите ее
знаменатель при помощи q .
- (⌘) Ниже приведены три утверждения, I–III. Для каждого из утверждений определите, верно
оно или неверно. Обоснуйте свои ответы.
- I. Прогрессия A не возрастает и не убывает.
- II. Прогрессия B – возрастающая.
- III. Члены прогрессии A , имеющие четные номера, образуют возрастающую прогрессию.

Дано: прогрессия B является бесконечной прогрессией с суммой $\frac{1}{8}$.

- (⌘) Найдите значение q .

Дана еще одна прогрессия, C , которая определена для любого натурального n следующим
образом: $c_n = \frac{a_n}{b_n}$.

Дано: $c_3 + c_4 + \dots + c_m = 44\,307$, m – натуральное число.

- (⌘) Найдите значение m .

3. В викторине 5 вопросов. Вероятность правильно ответить на каждый из вопросов равна P .
Известно, что вероятность того, что участник викторины ответит правильно не более чем
на 4 вопроса, равна 0.83193.

- (⌘) Найдите P .
- (⌘) Найдите вероятность того, что участник викторины ответит правильно в точности
на 3 вопроса.

За каждый вопрос дается количество очков, которое совпадает с номером вопроса.

Иными словами, участник, правильно ответивший на вопрос 1, получит одно очко; участник,
правильно ответивший на вопрос 2, получит два очка и так далее.

- (⌘) Найдите вероятность того, что участник наберет не менее 14 очков.
- (⌘) Найдите вероятность того, что участник викторины наберет в точности 6 очков.
- (⌘) Известно, что Ахиноам ответила правильно в точности на 3 вопроса. Найдите
вероятность того, что она набрала в точности 6 очков.

/продолжение на странице 5/

Раздел второй – геометрия и тригонометрия на плоскости

4. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность.

Диагонали четырехугольника пересекаются в точке F .

Касательная к окружности в точке C пересекает продолжение хорды AB в точке E (смотрите чертеж).

Дано: $AB = CB$.

(*) Докажите: $\angle EBC = 2 \cdot \angle BDC$.

Дано: AC – биссектриса угла ECD ,

$$\frac{CD}{CF} = \frac{7}{4}.$$

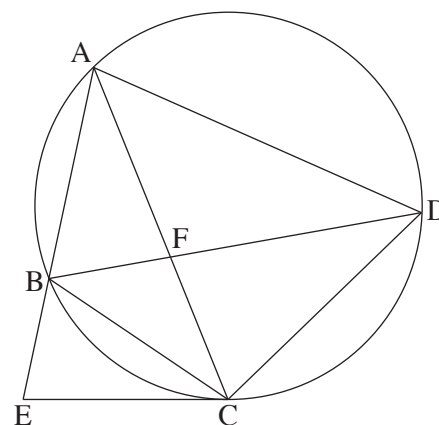
(2) (1) Докажите: $AC = AD$.

(2) Найдите отношение $\frac{AD}{CD}$.

(3) Найдите отношение площади треугольника ABF к площади треугольника CBF .

Обозначим через S площадь треугольника ABF .

(3) Выразите при помощи S площадь треугольника AEC .



5. BD – медиана треугольника ABC , проведенная к стороне AC . Точка E лежит на стороне BC .

BD и AE пересекаются в точке P (смотрите чертеж).

Дано: $BP = 3 \cdot PD$.

Обозначим: $AB = k$, $\angle BAP = \alpha$, $\angle ABP = \beta$, $\alpha < \beta$.

(*) Выразите длины отрезков AP и BP

при помощи α , β и k .

Дано, что AE и BD перпендикулярны друг другу,

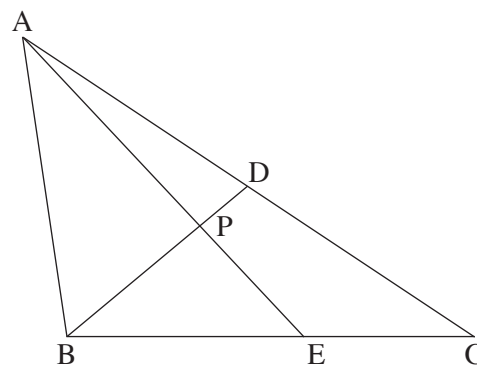
а площадь треугольника ABD равна $\frac{1}{4}k^2$.

(2) Найдите величину угла α .

(3) Найдите отношение радиуса окружности, описанной около треугольника AEC , к радиусу окружности, описанной около треугольника AEB .

(7) Найдите длину радиуса окружности, в которую вписан такой треугольник AEC , для которого $\angle ABC = 90^\circ$.

Выразите свой ответ при помощи k .



Раздел третий – дифференциальное и интегральное исчисление полиномов, функций, содержащих корни, рациональных функций и тригонометрических функций

6. Дана функция $f(x) = \frac{4x}{(x^2 - a)^2}$, a – положительный параметр .

Ответьте на вопросы пунктов (к)–(п). При необходимости выразите свои ответы при помощи a .

(к) (1) Найдите область определения функции $f(x)$.

(2) Найдите уравнения асимптот функции $f(x)$, перпендикулярных осям координат.

(3) Найдите области возрастания и убывания функции $f(x)$.

(г) Начертите схематический график функции $f(x)$.

$g(x)$ – функция, для которой выполняется $g'(x) = f(x)$. График функции $g(x)$ проходит через точку $(0, 0)$.

Функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют одну и ту же область определения.

(д) Найдите области вогнутости вверх и вогнутости вниз функции $g(x)$.

(т) (1) Найдите функцию $g(x)$, для которой выполняются указанные выше условия.

(2) Начертите схематический график функции $g(x)$, которую вы нашли в подпункте (т)(1).

$h(x)$ – функция, определенная следующим образом: $h(x) = f(x) \cdot g(x)$.

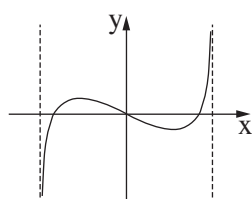
Функции $h(x)$ и $f(x)$ имеют одну и ту же область определения.

(п) (1) Найдите уравнения асимптот функции $h(x)$, параллельных осям координат.

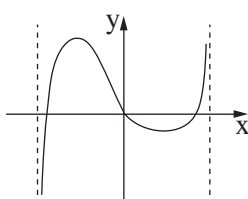
(2) Найдите области положительности функции $h(x)$.

7. Дана функция $f(x) = \cos x - \sqrt{\cos x}$, в области $-\pi \leq x \leq \pi$.

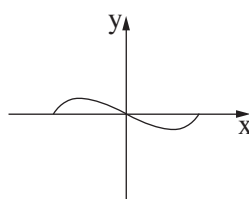
- (א) (1) Найдите область определения функции $f(x)$.
 (2) Покажите, что $f(x)$ – четная функция.
 (3) Найдите координаты точек пересечения графика функции $f(x)$ с осями координат.
 (4) Найдите координаты всех точек экстремума функции $f(x)$ и определите их тип (округлите свои ответы до двух десятичных знаков).
 (א) Начертите схематический график функции $f(x)$.
 (ג) Найдите области положительности и отрицательности функции $f(x)$ (если таковые существуют).
 (ד) Определите, какой из графиков I – IV, приведенных ниже, соответствует производной $f'(x)$.



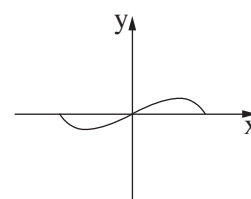
IV



III



II



I

Дана функция $g(x) = k - f(x)$, k – положительный параметр.

Функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют одну и ту же область определения.

Обозначим через S площадь фигуры, ограниченной графиком функции $f(x)$ и осью x на отрезке между 0 и $\frac{\pi}{2}$.

Дано, что площадь фигуры, ограниченной графиками функций $f(x)$, $g(x)$ и прямыми $x = \frac{\pi}{2}$, $x = -\frac{\pi}{2}$, равна $10 \cdot S$.

(ה) Выразите k при помощи S .

8. Отрезок AB – диаметр окружности с радиусом R .

На этом диаметре отмечают точку C ,

а на окружности отмечают точку D ,

так что отрезок CD перпендикулярен отрезку AB .

Длина отрезка AC больше R .

Через точку D проводят прямую, параллельную диаметру AB .

Через точку A проводят касательную к окружности.

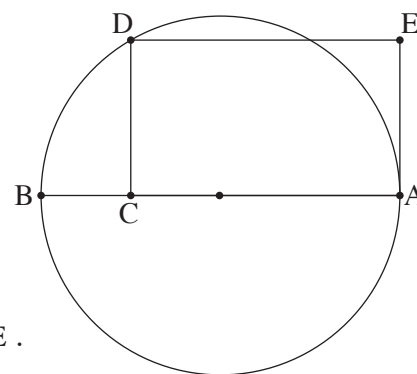
Эти параллельная прямая и касательная пересекаются в точке E .

Обозначим: $AC = x$.

(א) Выразите при помощи R значение x , для которого площадь прямоугольника $ACDE$ максимальна.

Точка F лежит на стороне DE .

(א) Выразите при помощи R максимальную сумму площадей треугольников CDF и AFE .



Желаем успеха!

Авторские права принадлежат Государству Израиль.
 Копировать или публиковать можно только
 с разрешения Министерства просвещения.

בהצלחה!

זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל.
 אין להעתיק או לפרסם
 אלא ברשות משרד החינוך.