

תוכנית חדשה

Обратите внимание: в этом вопроснике есть специальные инструкции. Отвечайте на вопросы, следуя этим инструкциям.

שימו לב: בבחינה זו יש הנחיות מיוחדות. יש לענות על השאלות על פי הנחיות אלה.

מ ת מ ט י ק ה

5 יחידות לימוד – שאלון ראשון

מ ת מ ט י ק ה

5 יחידות לימוד – שאלון ראשון

הוראות

- א. משך הבחינה: ארבע שעות ורבע.
- ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה:
בשאלון זה ארבעה פרקים, ובהם שמונה שאלות.
פרק ראשון – שאלות קצרות
פרק שני – אינדוקציה, סדרות והסתברות
פרק שלישי – גאומטריה וטריגונומטריה במישור
פרק רביעי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי
של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות
יש לענות על חמש שאלות, על שאלה אחת לפחות מן הפרק הראשון או השני ועל שאלה אחת לפחות מכל אחד מן הפרקים השלישי והרביעי.
 $20 \times 5 = 100$ נקודות.
- ג. חומר עזר מותר בשימוש:
1. מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון שיש בו אפשרות תכנות. שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.
2. דפי נוסחאות (מצורפים).
3. מילון עברי-לועזי / לועזי-עברי.
- ד. הוראות מיוחדות:
1. אין להעתיק את השאלה; יש לסמן את מספרה בלבד.
2. יש להתחיל כל שאלה בעמוד חדש. יש לרשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.
יש להסביר את כל הפעולות, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת. חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.
- ה. הוראות מיוחדות:
1. משך הבחינה: ארבע שעות ורבע.

- ב. Строение вопросника и ключ к оценке:
В этом вопроснике четыре раздела, и в них восемь вопросов.
Раздел первый – короткие вопросы
Раздел второй – индукция, последовательности и теория вероятностей
Раздел третий – геометрия и тригонометрия на плоскости
Раздел четвертый – дифференциальное и интегральное исчисление полиномов, функций, содержащих корни, рациональных функций и тригонометрических функций
Вы должны ответить на пять вопросов, по меньшей мере на один вопрос из первого или второго раздела и по меньшей мере на один вопрос из каждого из следующих разделов – третьего и четвертого. $5 \times 20 = 100$ баллов.
- в. Разрешенный вспомогательный материал:
1. Калькулятор без графического дисплея. При работе с калькулятором, в котором есть возможности программирования, запрещается использовать эти возможности. Использование калькулятора с графическим дисплеем или возможностей программирования может привести к тому, что экзамен будет аннулирован.
2. Листы с формулами (прилагаются).
3. Двухязычный словарь.

- г. Особые указания:
1. Не переписывайте вопрос; отметьте только его номер.
2. Начинайте ответ на каждый вопрос с новой страницы. Запишите в тетради этапы решения (также и в том случае, когда вычисления производились с помощью калькулятора). Объясните все свои действия, включая вычисления, подробно, в ясной и упорядоченной форме. Недостаточно подробная запись решения может привести к тому, что оценка за экзамен будет снижена или экзамен будет аннулирован.

יש לכתוב במחברת הבחינה בלבד. יש לרשום "טייטה" בראש כל עמוד המשמש טייטה. כתובת טייטה בדפים שאינם במחברת הבחינה עלולה לגרום לפסילת הבחינה.

Пишите только в экзаменационной тетради. Напишите слово «טייטה» в начале каждой страницы, отведенной вами под черновик. Выполнение черновых записей на листах, не относящихся к экзаменационной тетради, может привести к тому, что экзамен будет аннулирован.

Вопросы

Ответьте на пять из вопросов 1–8, по меньшей мере на один вопрос из первого или второго раздела и по меньшей мере на один вопрос из каждого из следующих разделов – третьего и четвертого (за каждый вопрос – 20 баллов).

Обратите внимание: если вы ответите более чем на пять вопросов, будут проверены только первые пять ответов в вашей тетради.

Раздел первый – короткие вопросы

1. Ответьте на два из четырех пунктов (а)–(г), приведенных ниже. Если вы ответите более чем на два пункта, будут проверены только первые два из ответов в вашей тетради.

- (а) (1) Докажите методом математической индукции или любым другим способом, что для любого натурального n выполняется:

$$2^2 + 4^2 + 6^2 + 8^2 + \dots + (2n)^2 = \frac{2n(2n+1)(n+1)}{3}$$

- (2) Вычислите значение суммы: $4^2 + 6^2 + 8^2 + \dots + 100^2$.

- (б) На чертеже справа приведена трапеция $ABCD$ ($AB \parallel CD$).

Точка O – точка пересечения диагоналей этой трапеции.

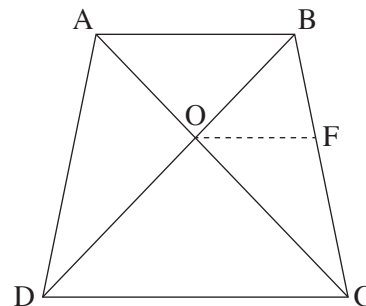
Дано: $\angle BAO = \angle CDO$

- (1) Докажите, что трапеция $ABCD$ равнобедренная.

Точка F – такая точка на стороне BC , что отрезок OF параллелен основаниям этой трапеции.

Известно, что диагонали этой трапеции перпендикулярны друг другу, $DO = 4$, $BO = 3$.

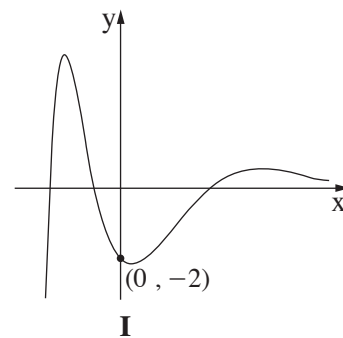
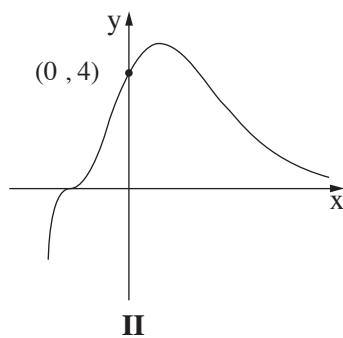
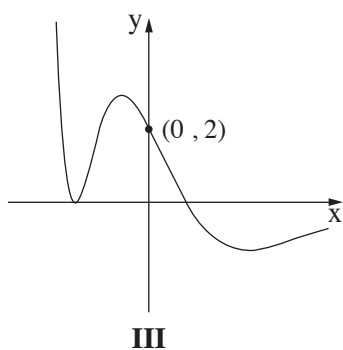
- (2) Найдите длину отрезка OF .



- (2) Функция $f(x)$, ее производная $f'(x)$ и ее вторая производная $f''(x)$ определены для любого x .
 Ниже приведены три графика I–III. Один из них соответствует функции $f(x)$, один –
 производной $f'(x)$, один – второй производной $f''(x)$.

На каждом графике показаны все его точки экстремума и все точки его пересечения
 с осью x .

На каждом графике подписаны координаты точки его пересечения с осью y .



- (1) Для каждой из функций $f(x)$, $f'(x)$ и $f''(x)$ найдите соответствующий ей график.
 Обоснуйте свой ответ.

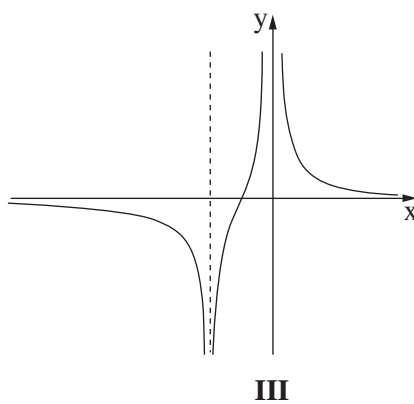
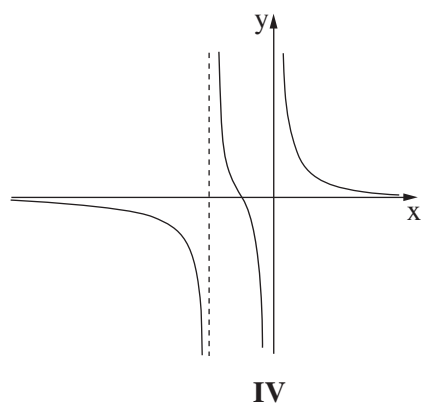
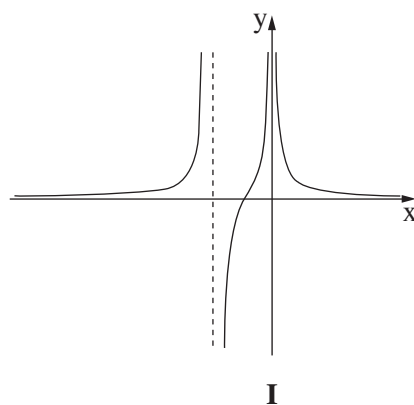
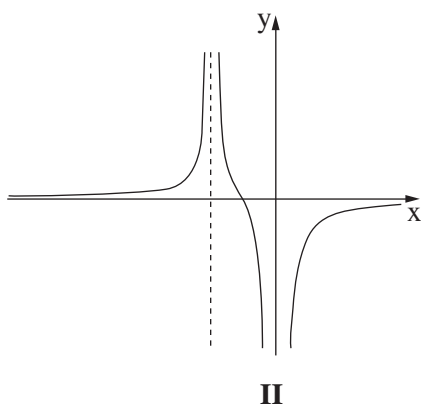
- (2) Сколько точек перегиба есть у функции $f(x)$? Обоснуйте свой ответ.

Координаты точки максимума функции $f(x)$: $(a, 5)$.

- (3) Найдите площадь фигуры, ограниченной графиком функции $f'(x)$,
 графиком функции $f''(x)$, прямой $x = a$ и осью y .

(7) Дана функция $f(x) = \frac{2(x+1)}{(x^2+2x)^2}$ определенная в области $x \neq 0$, $x \neq -2$.

- (1) Найдите области положительных значений функции $f(x)$.
- (2) Определите, какой из графиков I–IV соответствует функции $f(x)$. Обоснуйте свой ответ.
- (3) Вычислите площадь фигуры, ограниченной графиком функции $f(x)$, осью x и прямыми $x = 1$ и $x = 4$.



Раздел второй – индукция, последовательности и теория вероятностей

2. Дана бесконечная геометрическая прогрессия A , члены которой a_1, a_2, a_3, \dots .

Дано: $2a_2 + 8 = a_4$, $\frac{a_4}{a_2} = 4$.

(**⌘**) Найдите значение a_3 (найдите два возможных ответа).

Известно, что прогрессия A не возрастает и не убывает.

Из членов прогрессии A строят новую бесконечную последовательность B .

Известно, что для членов прогрессии B выполняется: $b_n = \frac{1}{a_n \cdot a_{n+1}}$

для любого натурального n .

(**⌘**) Докажите, что последовательность B – геометрическая прогрессия, и найдите ее знаменатель.

Из членов прогрессии A строят еще одну бесконечную геометрическую прогрессию C .

Члены прогрессии C : $\frac{k}{a_1 \cdot a_2}, \frac{k}{a_3 \cdot a_4}, \frac{k}{a_5 \cdot a_6}, \dots$. $k \neq 0$ – параметр.

(**⌘**) (1) Найдите знаменатель прогрессии C .

(2) Найдите, для каких значений k прогрессия C возрастает. Обоснуйте свой ответ.

Обозначим через S_B сумму прогрессии B и через S_C сумму прогрессии C .

Дано: $S_C = 4 \cdot S_B$.

(**⌘**) Найдите значение k .

3. В одной большой стране состоялись выборы. Избиратели могли проголосовать на выборах только за партию '⌘' или за партию '⌘'.

Обозначим через P вероятность того, что выбранный случайным образом избиратель проголосовал за партию '⌘' ($0 < P < 1$).

Случайным образом выбирают 3 избирателей.

Дано: вероятность того, что в точности один из них проголосовал за партию '⌘', в 2 раза больше вероятности того, что все трое проголосовали за партию '⌘'.

(**⌘**) Найдите значение P .

Случайным образом выбирают 4 избирателей.

(**⌘**) Известно, что все четверо проголосовали за одну партию. Какова вероятность, что они проголосовали за партию '⌘'?

Часть избирателей – пожилые люди, а остальные – молодые.

Известно, что 40% пожилых избирателей проголосовали за партию '⌘', а 15% молодых избирателей проголосовали за партию '⌘'.

(**⌘**) Какова вероятность случайным образом выбрать из всех избирателей одного молодого избирателя?

После выборов состоялся телефонный опрос избирателей. Дани, один из проводивших опрос, позвонил случайным образом только молодым избирателям. Он звонил им одному за другим и перестал звонить сразу после того, как поговорил с одним молодым избирателем, проголосовавшим за одну партию, и еще одним молодым избирателем, проголосовавшим за другую партию.

(**⌘**) Какова вероятность, что Дани позвонил в точности 5 молодым избирателям?

Раздел третий – геометрия и тригонометрия на плоскости

4. На чертеже ниже изображены большая окружность с радиусом R и маленькая окружность с центром в точке O и радиусом r .

Точка O лежит на большой окружности.

Точка A – одна из точек пересечения двух этих окружностей, как показано на чертеже.

Через точку A провели касательную к маленькой окружности. Эта касательная пересекает большую окружность в точке K .

Точка E лежит на маленькой окружности внутри треугольника KAO .

(ж) Докажите, что $\angle AOE = 2\angle KAE$.

Продолжение отрезка AE пересекает отрезок OK в точке M .

Дано, что точка M – середина отрезка OK .

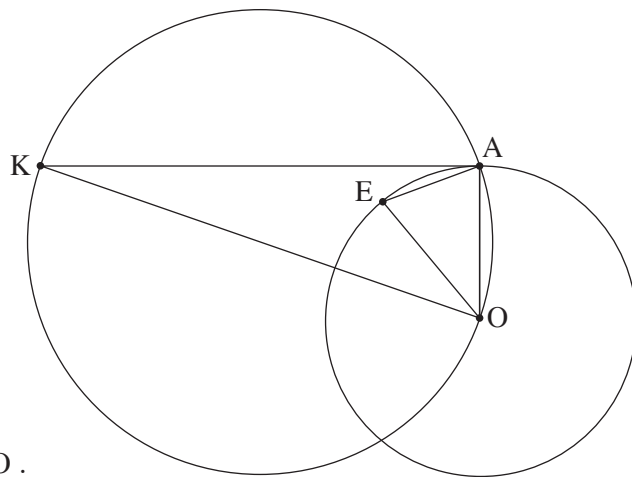
(з) Докажите, что точка M – это центр большой окружности.

(и) Докажите, что $\triangle MOA \sim \triangle OEA$.

Дано: $R = 1.5r$.

Обозначим через S площадь треугольника MEO .

(т) Выразите при помощи S площадь треугольника OKA .



5. В равнобедренный треугольник ABC ($AC = AB$) вписана окружность с центром O и радиусом r (смотрите чертеж).

Обозначим: $\angle ACB = 2\alpha$.

(ж) (1) Выразите при помощи r и α длину отрезка CO .

(2) Выразите при помощи r и α длину стороны AC .

Дано, что длина стороны AC в $\sqrt{3}$ раз больше длины отрезка CO .

(з) Найдите значение α .

Подставьте $\alpha = 30^\circ$ и ответьте на вопросы пунктов (и)–(т).

Окружность пересекает отрезок BO в точке K .

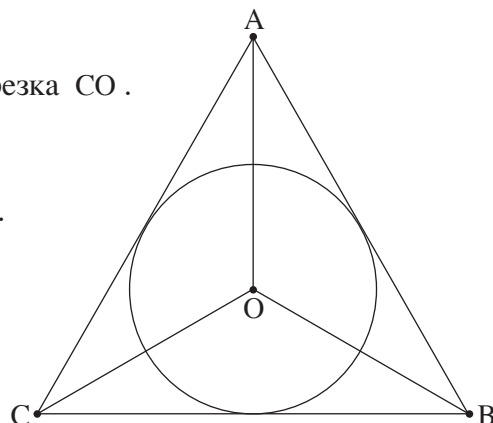
Известно, что длина отрезка CK равна $\sqrt{175}$.

(и) Найдите значение r .

Точка E лежит на стороне CB .

Известно, что площадь треугольника SKE равна 18.

(т) Вычислите длину отрезка BE .



Раздел четвертый – дифференциальное и интегральное исчисление полиномов, функций, содержащих корни, рациональных функций и тригонометрических функций

6. Дана функция $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}}$. a – положительный параметр.

Ответьте на вопросы пунктов (к)–(и). Выразите свои ответы при помощи a , если это необходимо.

(к) (1) Найдите область определения функции $f(x)$.

(2) Найдите уравнения асимптот функции $f(x)$, перпендикулярных осям координат.

(д) Докажите, что $f(x)$ – нечетная функция.

(л) Найдите области возрастания и убывания функции $f(x)$ (если таковые имеются).

(т) Начертите схематический график функции $f(x)$.

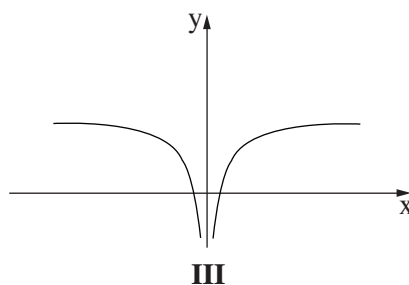
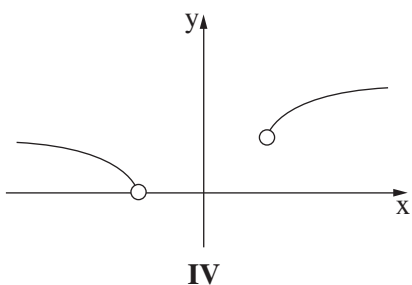
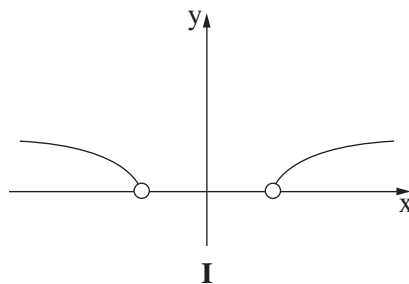
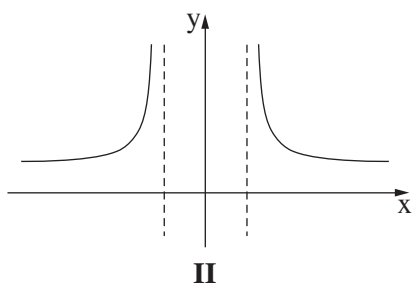
Дана функция $g(x) = \frac{1}{(f(x))^2}$. Область определения функции $g(x)$ совпадает с областью определения функции $f(x)$.

(н) (1) Найдите области возрастания и убывания функции $g(x)$.

(2) Определите, какой из графиков I–IV, приведенных в конце вопроса, соответствует функции $g(x)$. Обоснуйте свой ответ.

Дано, что площадь фигуры, ограниченной графиком функции $g(x)$, осью x и прямыми $x = 2a$ и $x = 3a$, равна 7.5.

(и) Найдите значение a .

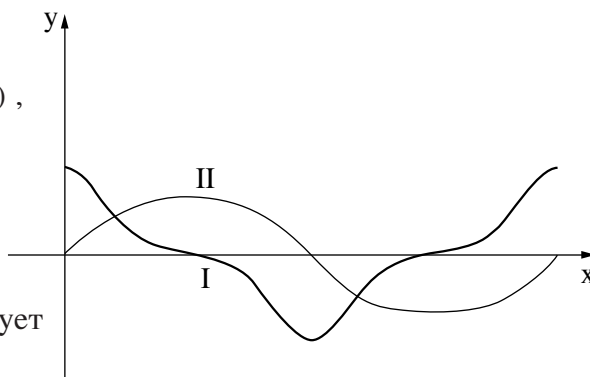


7. На чертеже справа представлены два графика, I–II, в области $0 \leq x \leq 2\pi$.

Один из этих графиков соответствует функции $f(x)$, а другой соответствует ее производной $f'(x)$.

Функции $f(x)$ и $f'(x)$ определены для любого x в данной области.

- (*) Определите, какой из графиков I–II соответствует функции $f(x)$. Обоснуйте свой ответ.



Известно, что функция $f(x) = \frac{\sin x}{1 + (\sin x)^2}$ имеет область определения $0 \leq x \leq 2\pi$.

- (а) (1) Найдите координаты точек пересечения графика функции $f(x)$ с осью x .
 (2) Найдите координаты всех точек экстремума функции $f(x)$ и определите их тип.

Дана функция $g(x) = |f(x) - 0.4|$, область определения которой $0 \leq x \leq 2\pi$.

- (а) Найдите координаты точек пересечения графика функции $g(x)$ с осью x .
 (г) (1) Начертите схематический график функции $g(x)$.
 (2) Найдите координаты всех точек экстремума функции $g(x)$ и определите их тип.

8. На чертеже справа представлен график функции $f(x) = \frac{a}{(x-1)^2} + 9$.

Функция имеет область определения $x \neq 1$.

a – положительный параметр.

- (*) Найдите уравнения асимптот функции $f(x)$, перпендикулярных осям координат.

Точка C лежит на графике функции $f(x)$, и ее координата x равна 2.

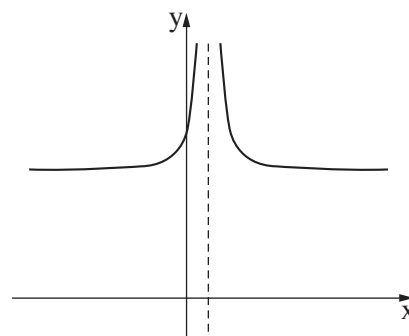
Через точку C провели касательную к графику функции $f(x)$.

- (а) Выразите при помощи a уравнение этой касательной.

Данная касательная пересекает ось x в точке A и прямую $x = 1$ в точке B .

D – точка, координаты которой $(1, 0)$.

- (а) Выразите при помощи a площадь треугольника ADB .
 (г) Найдите значение a , для которого площадь треугольника ADB будет минимальной.



Желаем успеха!

Авторские права принадлежат Государству Израиль.
 Копировать или публиковать можно только
 с разрешения Министерства просвещения.

בהצלחה!

זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל.
 אין להעתיק או לפרסם
 אלא ברשות משרד החינוך.