

Обратите внимание: в этом вопроснике есть специальные инструкции. Отвечайте на вопросы, следуя этим инструкциям.

שימו לב: בבחינה זו יש הנחיות מיוחדות. יש לענות על השאלות על פי הנחיות אלה.

Математика

5 единиц обучения – первый вопросник

מתמטיקה

5 יחידות לימוד – שאלון ראשון

Указания

а. Продолжительность экзамена: 4 часа 30 минут

б. Строение вопросника и ключ к оценке:

В этом вопроснике четыре раздела,

в которых есть восемь вопросов.

Раздел первый – короткие вопросы.

Раздел второй – последовательности и теория вероятности

Раздел третий – геометрия и тригонометрия на плоскости

Раздел четвертый – дифференциальное и интегральное

исчисление полиномов, функций, содержащих корни,

рациональных функций и тригонометрических функций

Вы должны ответить на четыре вопроса, по меньшей мере на

один вопрос из каждого из следующих разделов – второго,

третьего и четвертого – $4 \times 25 = 100$ баллов

в. Разрешенный вспомогательный материал:

1. Калькулятор без графического дисплея. При работе с калькулятором, в котором есть возможности программирования, запрещается использовать эти возможности. Использование калькулятора с графическим дисплеем или возможностей программирования может привести к тому, что экзамен будет аннулирован.

2. Листы с формулами (прилагаются).

3. Двухязычный словарь.

г. Особые указания:

1. Не переписывайте вопрос; отметьте только его номер.

2. Начинайте ответ на каждый вопрос с новой страницы.

Запишите в тетради этапы решения (также и в том случае, когда вычисления производились с помощью калькулятора).

Объясните все свои действия, включая вычисления, подробно, в ясной и упорядоченной форме. Недостаточно подробная запись решения может привести к тому, что оценка за экзамен будет снижена или экзамен будет аннулирован.

יש לכתוב במחברת הבחינה בלבד. יש לרשום "טיוטה" בראש כל עמוד המשמש טיוטה. כתיבת טיוטה בדפים שאינם במחברת הבחינה עלולה לגרום לפסילת הבחינה.

Пишите только в экзаменационной тетради. Напишите слово «טיוטה» в начале каждой страницы, отведенной вами под черновик. Выполнение любых черновых записей на листах, не относящихся к экзаменационной тетради, может привести к тому, что экзамен будет аннулирован.

Желаем успеха!

בהצלחה!

הוראות

א. משך הבחינה: ארבע שעות וחצי.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה:

בשאלון זה ארבעה פרקים, ובהם שמונה שאלות.

פרק ראשון – שאלות קצרות

פרק שני – סדרות והסתברות

פרק שלישי – גאומטריה וטריגונומטריה במישור

פרק רביעי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי

של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות

רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות

יש לענות על ארבע שאלות, לפחות על שאלה אחת

מכל אחד מן הפרקים השני, השלישי והרביעי –

$25 \times 4 = 100$ נקודות.

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

1. מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות

התכנות במחשבון שיש בו אפשרות תכנות.

שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות

במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.

2. דפי נוסחאות (מצורפים).

3. מילון עברי-לועזי / לועזי-עברי.

ד. הוראות מיוחדות:

1. אין להעתיק את השאלה;

יש לסמן את מספרה בלבד.

2. יש להתחיל כל שאלה בעמוד חדש.

יש לרשום במחברת את שלבי הפתרון,

גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת

מחשבון. יש להסביר את כל הפעולות, כולל

חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.

חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או

לפסילת הבחינה.

Вопросы

Ответьте на четыре из вопросов 1–8, по меньшей мере на один вопрос из каждого из следующих разделов – второго, третьего и четвертого (за каждый вопрос – 25 баллов).

Обратите внимание! Если вы ответите более чем на четыре вопроса, будут проверены только первые четыре ответа в вашей тетради.

Раздел первый – короткие вопросы

1. Ответьте на два из четырех пунктов (א)–(ד), приведенных ниже. Если вы ответите более чем на два пункта, будут проверены только первые два ответа в вашей тетради.

(א) Докажите методом индукции или другим способом, что для любого четного натурального n выполняется:

$$48 + 144 + 288 + \dots + 6n(n+2) = n(n+2)(n+4)$$

(ב) Четырехугольник $BCED$ вписан в окружность.

Продолжение хорды BD и продолжение хорды CE пересекаются в точке A (смотрите чертеж).

Дано: $AE = 2CE$, $AD = CE$.

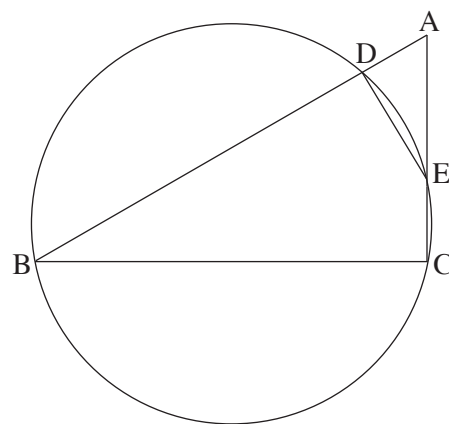
(1) Докажите: $\triangle AED \sim \triangle ABC$.

(2) Найдите отношение $\frac{AB}{AC}$.

(3) Дано: $\angle DEC = 150^\circ$.

Является ли BE диаметром данной окружности?

Обоснуйте свой ответ.



(ג) Справа приведен график функции $f(x)$.

У функции $f(x)$ есть две асимптоты, перпендикулярные оси x , и две асимптоты, перпендикулярные оси y .

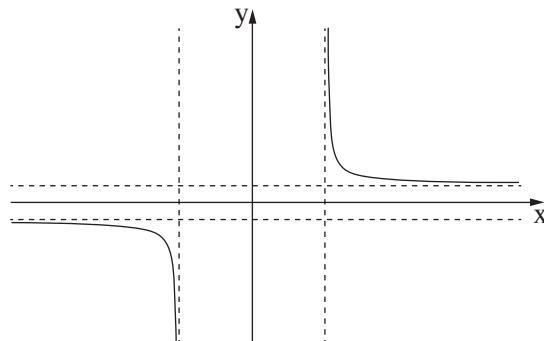
Одно из выражений I–IV, приведенных ниже, соответствует функции $f(x)$.

I. $\frac{x}{\sqrt{x^2 + 16}}$

II. $\frac{x}{\sqrt{x^2 - 16}}$

III. $\frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 16}}$

IV. $\frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 16}}$



(1) Определите, которое из выражений I–IV соответствует функции $f(x)$. Обоснуйте свой ответ.

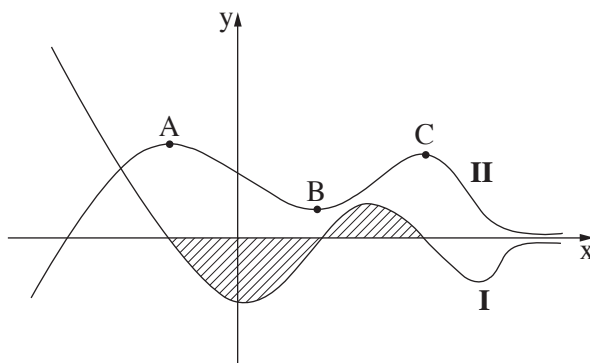
Дана функция $g(x)$, определенная в той же области, что и функция $f(x)$.

Для производной $g'(x)$ выполняется $g'(x) = f(x) + \frac{5}{3}$.

(2) Найдите области возрастания и убывания функции $g(x)$.

/продолжение на странице 3/

- (7) Графики I–II на чертеже ниже соответствуют функции $f(x)$ и ее производной $f'(x)$. Все точки экстремума функций $f(x)$ и $f'(x)$ представлены на чертеже.



- (1) Определите, какой из графиков, I или II, соответствует функции $f(x)$. Обоснуйте свое утверждение.
 (2) Сколько точек перегиба есть у функции $f(x)$? Обоснуйте свой ответ.

Точки A, B и C являются точками экстремума графика II, как показано на чертеже.

Дано: $y_A = 6$, $y_B = 2$.

Площадь фигуры, ограниченной графиком I и осью x (заштрихованная фигура на чертеже), равна 7.

- (3) Найдите координату y точки C.

Раздел второй – последовательности и теория вероятности

2. В арифметической прогрессии A дано: $a_1 = -4 - 4k$, $a_3 = -16 + 2k$. k – параметр.

(к) Найдите, при каких значениях k :

(1) прогрессия A возрастает, (2) прогрессия A убывает, (3) прогрессия A постоянна.

Дано, что $a_{17} = -232$.

(а) Найдите значение k .

Поставьте найденное вами значение k и ответьте на вопросы пунктов (г)–(т).

Дана новая прогрессия, B , члены которой определены следующим образом: $b_n = a_n + 24n + 17$ для любого натурального n .

(г) Докажите, что прогрессия B является арифметической.

(т) Вычислите сумму $b_1^2 - b_2^2 + b_3^2 - b_4^2 + \dots + b_{29}^2 - b_{30}^2$.

3. В одном городе было решено провести опрос, касающийся создания в нем нового парка.

В опросе участвовали только молодые и пожилые жители.

Каждый из жителей, участвовавших в опросе, написал, поддерживает он создание парка или возражает против него (воздержавшихся не было).

Все пожилые люди, которые участвовали в опросе, поддержали создание парка.

Случайным образом выбрали одного из жителей, которые участвовали в опросе.

Обозначим через p вероятность того, что выбранный житель был молодым.

Обозначим через k вероятность того, что выбранный житель поддержал создание парка.

(к) Выразите при помощи p и k вероятность того, что выбранный житель был молодым человеком, который поддержал создание парка.

Половина молодых жителей, которые участвовали в опросе, поддержали создание парка.

$\frac{3}{7}$ участников опроса, которые поддержали создание парка, были молодыми людьми.

(а) Найдите p и k .

Йоси, корреспондент местной новостной программы, проинтервьюировал 6 случайно выбранных молодых жителей, принявших участие в опросе.

(г) Какова вероятность того, что, по меньшей мере, один из них поддержал создание парка, и, по меньшей мере, один из них возражал против создания парка?

Затем Йоси проинтервьюировал одного за другим 5 случайно выбранных жителей, принявших участие в опросе.

(т) Какова вероятность того, что в точности 3 из этих проинтервьюированных жителей были молодыми и что последний проинтервьюированный был молодым?

Раздел третий – геометрия и тригонометрия на плоскости

4. Две окружности пересекаются в точках A и B . C – точка на правой окружности.

Продолжения отрезков CA и CB пересекают левую окружность в точках D и E , соответственно.

Точка F расположена на дуге BC , как показано на чертеже.

Продолжения отрезков CF и DE пересекаются в точке G .

(а) Докажите: $\angle EDA = \angle CBA$.

(б) Докажите: четырехугольник $GDAF$ может быть вписан в окружность.

Хорды AF и BC пересекаются в точке H .

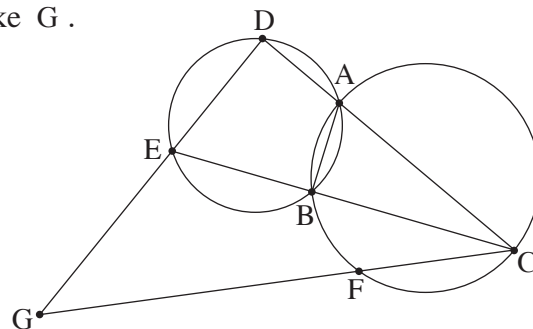
Дано: $\angle GEC = \angle CHA$.

(а) Докажите: $\frac{CG}{CD} = \frac{GE}{DE}$.

Дано: CE перпендикулярен AB ,

$DE = 18$, $CD = 36$.

(б) Вычислите длины отрезков EG и CG .



5. Дана окружность, центр которой O , а радиус R .

Из точки E , расположенной вне окружности, провели прямую, пересекающую данную окружность в точках A и B , как показано на чертеже.

Точка D – такая точка на большой дуге AB , что отрезок ED – касательная к этой окружности.

Точка C – это середина хорды AB .

Обозначим угол между радиусами OD и OA как 2α ($\alpha < 60^\circ$)

Дано: расстояние между точкой O и хордой AB равно $0.5R$.

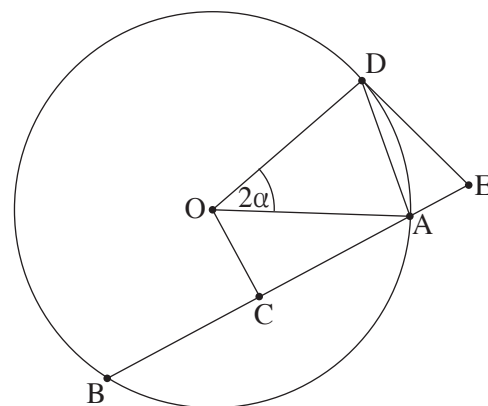
(а) Найдите углы четырехугольника $DOCE$. При необходимости выразите их при помощи α .

(б) Выразите при помощи R и α длину отрезка DE .

Дано, что радиус окружности, описанной вокруг треугольника AOD равен $\frac{4}{7}R$.

(а) Найдите α .

(б) Найдите отношение между площадью окружности, описанной вокруг четырехугольника $DOCE$, и площадью данной окружности.



Раздел четвертый – дифференциальное и интегральное исчисление полиномов, функций, содержащих корни, рациональных функций и тригонометрических функций

6. Дана функция $f(x) = \frac{\sqrt{x} - 4}{(\sqrt{x} - 2)^2}$.

- (א) (1) Найдите область определения функции $f(x)$.
- (2) Найдите уравнения асимптот функции $f(x)$, перпендикулярных осям координат.
- (3) Найдите координаты точек пересечения графика функции $f(x)$ с осями координат.
- (4) Найдите координаты точек экстремума функции $f(x)$ и определите их тип.
- (ב) Начертите схематический график функции $f(x)$.

Дана функция $g(x) = \frac{2x}{\sqrt{x} - 2}$, определенная в той же области, что и функция $f(x)$.

- (ג) Покажите, что для любого $x > 0$ в области определения этих функций выполняется $f(x) = g'(x)$.
- (ד) Ниже приведены утверждения I–II. Определите в отношении каждого из этих утверждений, верно ли оно. Обоснуйте свои ответы.
- I. Существует касательная к графику функции $g(x)$, угловой коэффициент которой равен 2.
- II. У функции $g(x)$ есть только одна точка перегиба.
- (ה) Вычислите значение выражения $\int_{0.25}^1 g(x) \cdot f(x) dx$.

7. Дана функция $f(x) = \frac{\sin(x) - a}{\sin(x) + a}$, a – положительный параметр.

Функция $f(x)$ определена для любого x , для которого $\sin(x) \neq -a$.

Дано, что во всех точках экстремума функции $f(x)$ ее график касается оси x .

- (א) Найдите значение a .

Подставьте $a = 1$ и ответьте на вопросы пунктов (ב)–(ה) для области $-2\pi \leq x \leq 2\pi$.

- (ב) (1) Найдите область определения функции $f(x)$.
- (2) Найдите координаты точек пересечения графика функции $f(x)$ с осями координат.
- (3) Найдите координаты точек экстремума функции $f(x)$ и определите их тип.
- (ג) Начертите схематический график функции $f(x)$.
- (ד) Сколько решений есть у уравнения $f(x) = -1$ в данной области? Обоснуйте свой ответ.

Известно, что функция $f(x)$ является вогнутой вниз во всех частях области своего определения.

- (ה) Определите, верно ли приведенное ниже утверждение. Обоснуйте свой ответ.

$$\int_0^{\pi} (f(x) + 1) dx > \frac{\pi}{2}$$

8. Даны два прямоугольных прилегающих друг другу сада, сад А и сад В .

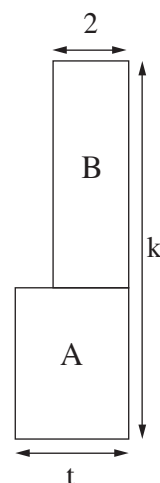
Ширина сада А равна t метрам.

Ширина сада В равна 2 метрам, а его площадь равна $2t + 2$ м²,

как показано на чертеже справа.

Общая длина обоих садов равна k метрам. k – константа.

- (א) Выразите при помощи k и t площадь сада А .
- (ב) Выразите при помощи k значение t , при котором отношение площади сада В к площади сада А будет минимальным.
- (ג) Выразите при помощи k значение t , для которого отношение площади сада А к площади сада В будет максимальным. Обоснуйте свой ответ.



Желаем успеха!

Авторские права принадлежат Государству Израиль.
Копировать или публиковать можно только
с разрешения Министерства просвещения.

בהצלחה!

זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל.
אין להעתיק או לפרסם
אלא ברשות משרד החינוך.