

תוכנית חדשה

Математика

5 единиц обучения – первый вопросник

מתמטיקה

5 יחידות לימוד – שאלון ראשון

Указания

- а. Продолжительность экзамена: 3 часа 45 минут.
- б. Строение вопросника и ключ к оценке:
В этом вопроснике четыре раздела, и в них восемь вопросов.
Раздел первый – короткие вопросы
Раздел второй – индукция, последовательности и теория вероятностей
Раздел третий – геометрия и тригонометрия на плоскости
Раздел четвертый – дифференциальное и интегральное исчисление полиномов, функций, содержащих корни, рациональных функций и тригонометрических функций
Вы должны ответить на пять вопросов, по меньшей мере на один вопрос из первого или второго раздела и по меньшей мере на один вопрос из каждого из следующих разделов – третьего и четвертого.
 $5 \times 20 = 100$ баллов.

в. Разрешенный вспомогательный материал:

1. Калькулятор без графического дисплея. При работе с калькулятором, в котором есть возможности программирования, запрещается использовать эти возможности. Использование калькулятора с графическим дисплеем или возможностей программирования может привести к тому, что экзамен будет аннулирован.
2. Листы с формулами (прилагаются).
3. Двухязычный словарь.

г. Особые указания:

1. Не переписывайте вопрос; отметьте только его номер.
2. Начинайте ответ на каждый вопрос с новой страницы. Запишите в тетради этапы решения (также и в том случае, когда вычисления производились с помощью калькулятора). Объясните все свои действия, включая вычисления, подробно, в ясной и упорядоченной форме. Недостаточно подробная запись решения может привести к тому, что оценка за экзамен будет снижена или экзамен будет аннулирован.

הוראות

- א. משך הבחינה: שלוש שעות וארבעים וחמש דקות.
- ב. מבנה השאלון ומפתח הערכה:
בשאלון זה ארבעה פרקים, ובהם שמונה שאלות.
פרק ראשון – שאלות קצרות
פרק שני – אינדוקציה, סדרות והסתברות
פרק שלישי – גאומטרייה וטריגונומטרייה במישור
פרק רביעי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי
של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות
יש לענות על חמש שאלות, על שאלה אחת לפחות מן הפרק הראשון או השני ועל שאלה אחת לפחות מכל אחד מן הפרקים השלישי והרביעי.
 $100 = 20 \times 5$ נקודות.

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

1. מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון שיש בו אפשרות תכנות. שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.
2. דפי נוסחאות (מצורפים).
3. מילון עברי-לועזי / לועזי-עברי.

ד. הוראות מיוחדות:

1. אין להעתיק את השאלה; יש לסמן את מספרה בלבד.
2. יש להתחיל כל שאלה בעמוד חדש. יש לרשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון. יש להסביר את כל הפעולות, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת. חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

יש לכתוב במחברת הבחינה בלבד. יש לרשום "טייטה" בראש כל עמוד המשמש טייטה. כתיבת טייטה בדפים שאינם במחברת הבחינה עלולה לגרום לפסילת הבחינה.

Пишите только в экзаменационной тетради. Напишите слово «טייטה» в начале каждой страницы, отведенной вами под черновик. Выполнение черновых записей на листах, не относящихся к экзаменационной тетради, может привести к тому, что экзамен будет аннулирован.

Вопросы

Ответьте на пять из вопросов 1–8, по меньшей мере на один вопрос из первого или второго раздела и по меньшей мере на один вопрос из каждого из следующих разделов – третьего и четвертого (за каждый вопрос – 20 баллов).

Обратите внимание: если вы ответите более чем на пять вопросов, будут проверены только первые пять из ответов в вашей тетради.

Раздел первый – короткие вопросы

1. Ответьте на вопросы двух из пунктов (а)–(г), приведенных ниже. Если вы ответите более чем на два пункта, будут проверены только первые два из ответов в вашей тетради.

(а) На чертеже ниже изображена окружность с центром O и радиусом R .

Через точки A и E , лежащие на этой окружности, провели две касательные, перпендикулярные друг другу.

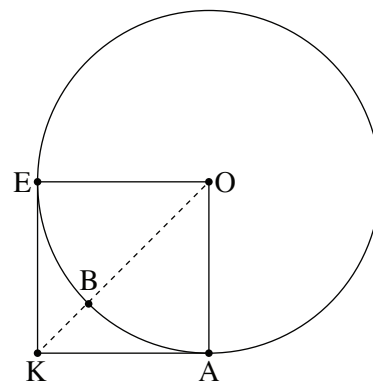
Эти касательные пересекаются в точке K .

Отрезок KO пересекает окружность в точке B .

(1) Найдите, во сколько раз площадь треугольника AOB больше площади треугольника AKB .

Дано, что площадь треугольника AOB равна 16.

(2) Найдите длину высоты к стороне AK в треугольнике AKB .



(б) На шахматном турнире два игрока – Яир и Надав – соревнуются друг с другом.

Каждая игра может закончиться с одним из 3 следующих результатов: победа Яира, победа Надава или ничья.

В каждой игре вероятность того, что победит Яир, постоянна и в 2 раза больше вероятности того, что победит Надав.

Обозначим через p вероятность того, что Надав победит в одной игре.

Яир и Надав играют две игры.

(1) Выразите при помощи p вероятность того, что один из игроков победит в обеих играх.

Известно, что если ни один из игроков не победил в обеих играх, то вероятность того, что каждая из игр закончилась вничью, равна $\frac{9}{31}$.

(2) Определите, какой из представленных ниже вариантов I–III соответствует значению p . Обоснуйте свой ответ.

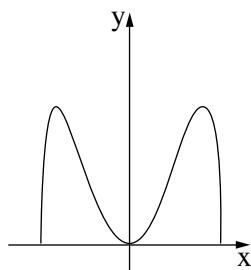
I. $\frac{1}{10}$ II. $\frac{11}{27}$ III. $\frac{1}{6}$

(*) Дана функция: $f(x) = \sqrt{x^2 - 1} + 2\sqrt{16 - x^2}$.

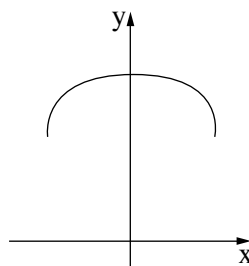
(1) Найдите область определения функции $f(x)$.

(2) Один из графиков I-IV, представленных ниже, соответствует функции $f(x)$.

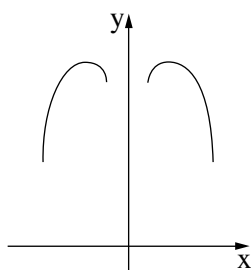
Определите, какой из них, и обоснуйте свой ответ.



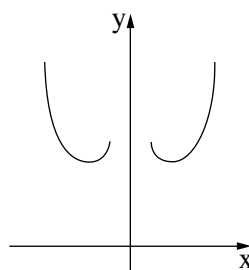
II



I



IV



III

(7) Дана бесконечная прогрессия, члены которой определены как $a_n = \frac{\cos(\pi \cdot 2^n)}{5 \cdot 2^n}$ для любого натурального n .

(1) Найдите первые три члена прогрессии a_n .

(2) Докажите, что прогрессия a_n – геометрическая прогрессия, и найдите ее знаменатель.

(3) Найдите сумму прогрессии a_n .

Раздел второй – индукция, последовательности и теория вероятностей

2. a_n – бесконечно убывающая геометрическая прогрессия, сумма членов которой сходится [מתכנס].

q – знаменатель этой прогрессии.

Обозначим через T сумму членов этой прогрессии с нечетными номерами,

и обозначим через R сумму членов этой прогрессии с четными номерами.

Дано: $\frac{T^2}{R^2} = 16$.

- (⌘) Найдите значение q .

Дана прогрессия b_n , члены которой определены как $b_n = \frac{1+q}{a_n \cdot a_{n+1}}$ для любого натурального n .

Дано: $b_1 = 1$.

- (ⓐ) Найдите значение a_1 .

- (ⓑ) Выразите b_n при помощи n .

- (ⓓ) Докажите методом индукции или любым другим методом, что для любого натурального n выполняется: $b_1 + b_2 + \dots + b_n = \frac{16^n - 1}{15}$.

3. В одной большой городской школе в параллели n часть учеников – вожатые в молодежном движении, а остальные вожатыми не являются.

В этой параллели часть учеников имеют водительские права, а у остальных водительских прав нет.

Половина учеников, имеющих водительские права, – вожатые в молодежном движении.

Процент учеников-вожатых среди учеников, имеющих права, равен проценту учеников без водительских прав среди учеников-вожатых.

Случайным образом выбирают ученика из этой параллели.

Вероятность того, что выбранный ученик – вожатый или что у него есть права, равна 0.45.

- (⌘) Найдите, сколько процентов учеников этой параллели – вожатые.

- (ⓐ) Случайным образом выбирают ученика из числа учеников без водительских прав.

Какова вероятность того, что этот ученик – вожатый?

Случайным образом выбирают 5 учеников из числа тех, у кого нет водительских прав.

- (ⓑ) (1) Какова вероятность того, что было выбрано более одного вожатого?

(2) Известно, что было выбрано более одного вожатого. Какова вероятность, что число выбранных вожатых – четное?

Раздел третий – геометрия и тригонометрия на плоскости

4. На чертеже ниже изображен тупоугольный треугольник ABC , вписанный в окружность.

Точка K – такая точка на продолжении стороны AB ,
 что $AB = BK$.

Продолжение отрезка KC пересекает эту окружность
 в дополнительной точке, точке F .

Дано: $\sphericalangle BAC = \sphericalangle BCA$.

(а) Докажите, что AF – диаметр окружности.

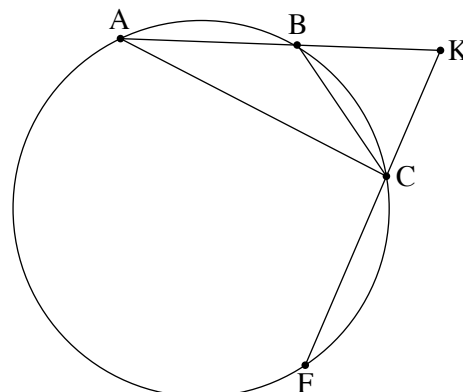
Хорды BF и AC пересекаются в точке D .

(б) Докажите, что треугольник ADK – равнобедренный.

(в) (1) Докажите, что четырехугольник $BDCK$ можно вписать в окружность.

(2) Докажите, что $\sphericalangle DKC = \sphericalangle FAC$.

(г) Докажите, что $AC \cdot AD = KC \cdot AF$.



5. На чертеже ниже изображен дельтоид [דלתון] $ABCD$ ($AB = AD$, $CB = CD$).

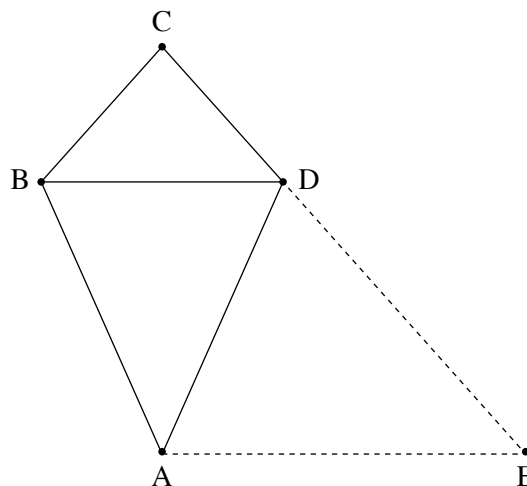
Дано: $\sphericalangle BAD = \sphericalangle CDB = 2\alpha$, $0^\circ < \alpha < 45^\circ$.

Обозначим: $AB = k$.

(а) Выразите при помощи k и α радиус
 окружности, описанной вокруг
 треугольника CDB .

Известно, что радиус окружности, описанной вокруг
 треугольника ABD , в $\frac{4}{3}$ раза больше радиуса
 окружности, описанной вокруг треугольника CDB .

(б) Найдите величину угла BAD .



Точка O – центр окружности, описанной вокруг треугольника ABD .

Через точку A провели прямую, параллельную BD и пересекающую продолжение
 стороны CD в точке E .

Известно, что площадь треугольника AOE равна 70 .

(в) Найдите значение k .

Раздел четвертый – дифференциальное и интегральное исчисление полиномов, функций, содержащих корни, рациональных функций и тригонометрических функций

6. Дана функция $f(x) = \frac{\sqrt{5x^2 - kx}}{x^3}$, k – положительный параметр.

(а) Выразите при помощи k область определения функции $f(x)$.

Дана функция $h(x) = -f(x)$.

Координата x точки пересечения графика функции $f(x)$ с графиком функции $h(x)$ равна 1.6.

(б) Найдите значение k .

Подставьте $k = 8$ в функцию $f(x)$ и ответьте на вопросы пунктов (г)–(и).

(г) (1) Найдите уравнения асимптот функции $f(x)$, перпендикулярных осям координат.

(2) Найдите координаты всех точек экстремума функции $f(x)$ и определите их тип.

(3) Начертите схематический график функции $f(x)$.

Дана функция $g(x) = (f(x))^2$, область определения которой совпадает с областью определения функции $f(x)$.

(д) Начертите схематический график функции $g(x)$.

a – параметр, больший 2.

(е) Значение выражения $\int_a^{a+1} g(x) dx$ равно, больше или меньше значения выражения $\int_a^{a+1} f(x) dx$? Обоснуйте свой ответ.

(и) Вычислите площадь фигуры, ограниченной графиком функции $g(x)$, осью x и прямыми $x = 2$ и $x = 6$.

7. Дана функция $f(x) = (\sin x)^2 + \cos x - 1$, определенная на интервале $-\pi \leq x \leq \pi$.

(а) Докажите, что функция $f(x)$ – четная.

(б) (1) Найдите координаты точек пересечения графика функции $f(x)$ с осью x .

(2) Найдите координаты всех точек экстремума функции $f(x)$ и определите их тип.

(г) Начертите схематический график функции $f(x)$.

Дана функция $g(x) = \frac{1}{f(x) + b}$, b – параметр.

Известно, что у функции $g(x)$ есть ровно две вертикальные асимптоты.

(д) Напишите два возможных значения b , одно из которых положительное, а другое отрицательное.

Подставьте в функцию $g(x)$ найденное вами отрицательное значение b и ответьте на вопросы пунктов (е)–(и).

(е) (1) Найдите область определения функции $g(x)$.

(2) Найдите координаты всех точек экстремума функции $g(x)$ и определите их тип.

(и) Начертите схематический график функции $g(x)$.

8. Дана функция $f(x) = kx^3 - 3x^2 + 8kx$, определенная для любого x .

k – параметр, отличный от 0 .

Точка A – это точка перегиба функции $f(x)$.

(а) Выразите с помощью k координаты точки A .

Известно, что точка A лежит в первом квадранте.

(б) Найдите возможную область значений k .

Через точку A провели перпендикуляр к оси x , пересекающий ее в точке B , и перпендикуляр к оси y , пересекающий ее в точке C .

Дан квадрат I , длина стороны которого равна длине отрезка AB , и квадрат II , длина стороны которого равна длине отрезка AC .

(в) Найдите значение k , для которого сумма площадей квадратов I и II минимальна (в ответе можно оставить знак корня).

Желаем успеха!

Авторские права принадлежат Государству Израиль.
Копировать или публиковать можно только
с разрешения Министерства просвещения.

בהצלחה!

זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל.
אין להעתיק או לפרסם
אלא ברשות משרד החינוך.