

תוכנית חדשה

**Обратите внимание:** в этом вопроснике есть специальные инструкции.  
Отвечайте на вопросы, следуя этим инструкциям.

**שימו לב:** בבחינה זו יש הנחיות מיוחדות.  
יש לענות על השאלות על פי הנחיות אלה.

## Математика

5 единиц обучения – второй вопросник

## מתמטיקה

5 יחידות לימוד – שאלון שני

### Указания

- א. Продолжительность экзамена: 2 часа 45 минут.
- ב. Строение вопросника и ключ к оценке:  
В этом вопроснике два раздела, и в них пять вопросов.  
Раздел первый – аналитическая геометрия, векторы, тригонометрия в пространстве, комплексные числа  
Раздел второй – рост и затухание, степенные функции, показательные и логарифмические функции  
Вы должны ответить на три вопроса, по меньшей мере на один вопрос из каждого раздела –  $3 \times 33\frac{1}{3} = 100$  баллов.

в. Разрешенный вспомогательный материал:

1. Калькулятор без графического дисплея. При работе с калькулятором, в котором есть возможности программирования, запрещается использовать эти возможности. Использование калькулятора с графическим дисплеем или возможностей программирования может привести к тому, что экзамен будет аннулирован.
2. Листы с формулами (прилагаются).
3. Двухязычный словарь.

г. Особые указания:

1. Не переписывайте вопрос; отметьте только его номер.
2. Начинайте ответ на каждый вопрос с новой страницы. Запишите в тетради этапы решения (также и в том случае, когда вычисления производились с помощью калькулятора). Объясните все свои действия, включая вычисления, подробно, в ясной и упорядоченной форме. Недостаточно подробная запись решения может привести к тому, что оценка будет снижена или экзамен будет аннулирован.

יש לכתוב במחברת הבחינה בלבד. יש לרשום "טיוטה" בראש כל עמוד המשמש טיוטה.  
כתיבת טיוטה בדפים שאינם במחברת הבחינה עלולה לגרום לפסילת הבחינה.

Пишите только в экзаменационной тетради. Напишите слово «טיוטה» в начале каждой страницы, отведенной вами под черновик. Выполнение черновых записей на листах, не относящихся к экзаменационной тетради, может привести к тому, что экзамен будет аннулирован.

### הוראות

- א. משך הבחינה: שתיים וארבעים וחמש דקות.
- ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה:  
בשאלון זה שני פרקים, ובהם חמש שאלות.  
פרק ראשון – גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב, מספרים מרוכבים  
פרק שני – גדילה ודעיכה, פונקציות חזקה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות  
יש לענות על שלוש שאלות, לפחות על שאלה אחת מכל פרק –  $3 \times 33\frac{1}{3} = 100$  נקודות.

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

1. מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון שיש בו אפשרות תכנות. שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.
2. דפי נוסחאות (מצורפים).
3. מילון עברי-לועזי / לועזי-עברי.

ד. הוראות מיוחדות:

1. אין להעתיק את השאלה; יש לסמן את מספרה בלבד.
2. יש להתחיל כל שאלה בעמוד חדש. יש לרשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון. יש להסביר את כל הפעולות, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת. חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

### Вопросы

Ответьте на три из вопросов 1–5 , по меньшей мере на один вопрос из каждого раздела (за каждый вопрос –  $33\frac{1}{3}$  балла).

**Обратите внимание:** если вы ответите более чем на три вопроса, будут проверены только первые три из ответов в вашей тетради.

### Раздел первый – аналитическая геометрия, векторы, тригонометрия в пространстве, комплексные числа

1. Дана окружность  $I$  , заданная уравнением  $x^2 - 6x + y^2 + t = 0$  .  $t$  – параметр,  $t < 9$  .

(**к**) Выразите при помощи  $t$  радиус данной окружности.

Прямая  $y = x$  является касательной к этой окружности.

(**д**) Найдите значение  $t$  .

Окружность  $I$  сдвинули влево так, что образовалась окружность  $II$  с центром в начале координат  $O$  .

Точка  $A$  – некоторая точка на окружности  $II$  , так что  $-1.5 \leq y_A \leq 1.5$  .

Через точку  $A$  проводят хорду  $AB$  , перпендикулярную оси  $y$  .

Точка  $P$  – такая точка на хорде  $AB$  , что выполняется  $AB = 2 \cdot PO$  .

(**з**) Покажите, что геометрическое место всех точек  $P$  , полученных этим способом, расположено на эллипсе, и найдите его уравнение.

Точка  $K$  – правый фокус, а точка  $F$  – левый фокус эллипса, уравнение которого вы нашли в пункте (**з**).

Точка  $C$  – некоторая точка на этом эллипсе, так что образуется треугольник  $СКF$  .

(**т**) Вычислите периметр треугольника  $СКF$  .

(**н**) Существует ли такая точка  $C$  , для которой площадь треугольника  $СКF$  равна 3 ?

Обоснуйте свой ответ.

2. Дана пирамида  $SABCD$ , основание которой  $ABCD$  – параллелограмм.

$SA$  – высота данной пирамиды.

Точка  $M$  – середина диагонали  $BD$ .

Обозначим:  $\vec{AB} = \underline{u}$ ,  $\vec{AD} = \underline{v}$ ,  $\vec{AS} = \underline{w}$ .

(\*) Выразите при помощи  $\underline{u}$ ,  $\underline{v}$  и  $\underline{w}$  вектор  $\vec{SM}$ .

Известно, что  $\vec{SM}$  перпендикулярен  $\vec{DB}$ .

(\*) Докажите, что  $|\underline{u}| = |\underline{v}|$ .

Дано:  $A(0, 0, 0)$ ,  $B(0, 5, 0)$ ,  $S(0, 0, 6)$ .

$D(3, p, 0)$ ,  $p > 0$ .

(\*) Найдите координаты точек  $D$  и  $C$ .

Через диагональ  $AC$  проводят плоскость, параллельную ребру  $SD$ .

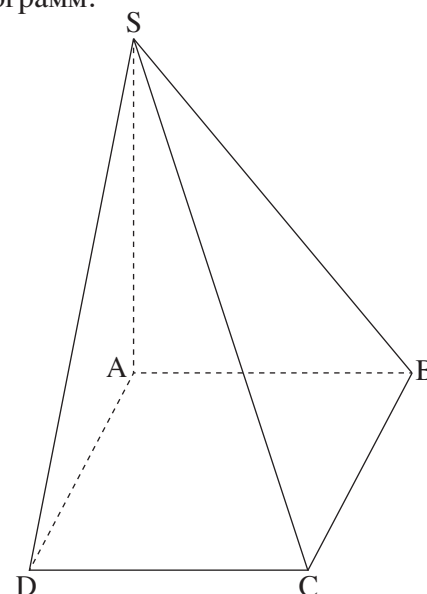
Плоскость пересекает ребро  $SB$  в точке  $K$ .

(\*) Найдите уравнение этой плоскости.

(\*) Ниже приведены два утверждения I–II. Определите для каждого утверждения, верно оно или неверно. Обоснуйте свои ответы.

I. Прямая  $KM$  параллельна прямой  $SD$ .

II. Любая прямая, перпендикулярная плоскости  $ACK$ , перпендикулярна прямой  $SD$ .



3. (\*) Выразите при помощи  $x$  и  $y$  уравнение геометрического места всех точек  $z = x + iy$  на гауссовой плоскости, для которых выполняется  $|z| = |z - (2 + 2i)|$ .

$z$  – комплексная переменная.

Дано уравнение  $z^2 - z(2 + 2i) + 4i = 0$ .

$A$  и  $B$  – точки, которые соответствуют двум решениям этого уравнения.

(\*) Покажите, что точки  $A$  и  $B$  расположены в геометрическом месте точек, которое вы нашли в пункте (\*).

Точки  $C$  и  $D$  – такие точки на осях координат, что  $ABCD$  – квадрат.

Квадрат  $ABCD$  повернули вокруг точки начала координат против часовой стрелки на угол  $\alpha$  ( $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ ).

Все восемь точек (точки  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$  и четыре точки, полученные после поворота)

соответствуют решениям уравнения  $z^n = b$ , в котором  $n$  – натуральное число,

$b$  – действительное число.

(\*) (1) Найдите значение  $b$  и значение  $\alpha$  для  $n = 8$ .

(2) Найдите возможное значение  $n$  для  $\alpha = 15^\circ$  и найдите соответствующее ему значение  $b$ .

/продолжение на странице 4/

## Раздел второй – рост и затухание, степенные функции, показательные и логарифмические функции

4. Дана функция  $f(x) = \frac{e^x}{a - e^x}$ ,  $a$  – параметр, отличный от 0.

(а) Ответьте на вопросы подпунктов (1)–(3) для  $a > 0$  и для  $a < 0$ .

Выразите свои ответы при помощи  $a$ , если это необходимо.

(1) Найдите область определения функции  $f(x)$ .

(2) Найдите уравнения асимптот функции  $f(x)$ , перпендикулярных оси  $y$ .

(3) Найдите области возрастания и убывания функции  $f(x)$  (если таковые существуют).

(б) Определите, какой из графиков I–IV, приведенных в конце вопроса, соответствует функции  $f(x)$  для  $a = 3$  и какой из них соответствует функции  $f(x)$  для  $a = -3$ .  
Обоснуйте свои ответы.

Подставьте  $a = 3$  в функцию  $f(x)$  и ответьте на вопросы пунктов (а)–(г).

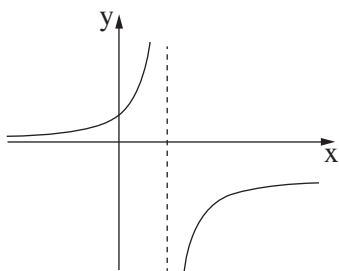
Дана функция:  $g(x) = \frac{1}{f(x) + 2}$ .

(а) (1) Найдите область определения функции  $g(x)$ .

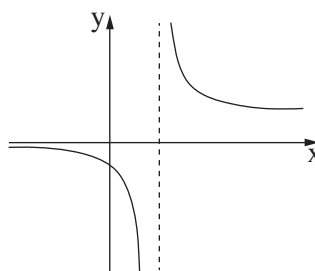
(2) Найдите уравнения асимптот функции  $g(x)$ , перпендикулярных осям координат.

(г) Начертите схематический график функции  $g(x)$ .

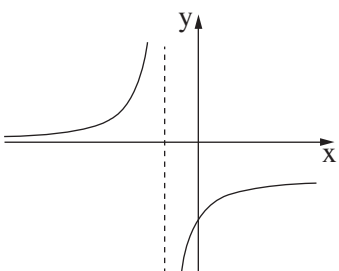
(н) Дано утверждение:  $\int_{-4}^{-2} g(x) dx > \int_2^3 g(x) dx$ . Верно ли это утверждение? Обоснуйте свой ответ.



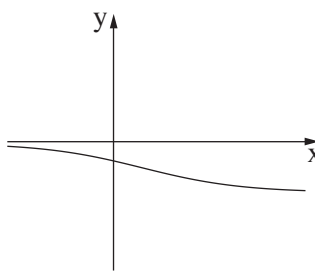
II



I



IV

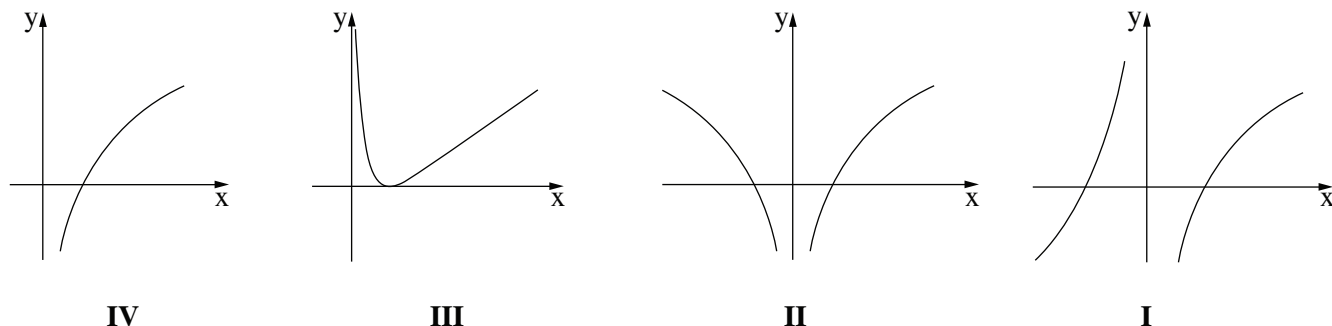


III

5. Дана функция  $f(x) = \ln(x^n)$ ,  $n$  – четное натуральное число.

(א) (1) Найдите область определения функции  $f(x)$ .

(2) Ниже приведены четыре графика I–IV. Определите, какой из них соответствует функции  $f(x)$ . Обоснуйте свой ответ.



Подставьте  $n = 2$  в функцию  $f(x)$  и ответьте на вопросы пунктов (ב)–(ד).

Дана функция  $g(x) = (f(x))^2 - 4$ , определенная для любого  $x \neq 0$ .

(ב) (1) Найдите координаты точек пересечения графика функции  $g(x)$  с осью  $x$ .

(2) Найдите координаты точек экстремума функции  $g(x)$  и определите их тип.

(ג) Начертите схематический график функции  $g(x)$ .

Дана функция  $k(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}$  в области  $x > 0$ .

(ד) (1) Найдите область определения функции  $k(x)$ .

(2) Вычислите площадь фигуры, ограниченной графиком функции  $k(x)$ , осью  $x$  и прямыми  $x = e^2$  и  $x = e^3$ .

**Желаем успеха!**

Авторские права принадлежат Государству Израиль.  
Копировать или публиковать можно только  
с разрешения Министерства просвещения.

**בהצלחה!**

זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל.  
אין להעתיק או לפרסם  
אלא ברשות משרד החינוך.