

תוכנית חדשה

## Математика

5 единиц обучения – второй вопросник

## מתמטיקה

5 יחידות לימוד – שאלון שני

### Указания

- а. Продолжительность экзамена: 2 часа 30 минут.
- б. Строение вопросника и ключ к оценке:  
В этом вопроснике два раздела, и в них пять вопросов.  
Раздел первый – аналитическая геометрия, векторы, тригонометрия в пространстве, комплексные числа  
Раздел второй – рост и затухание, показательные и логарифмические функции  
Следует ответить на три вопроса, по меньшей мере на один вопрос из каждого раздела  
 $3 \times 33\frac{1}{3} = 100$  баллов.

в. Разрешенный вспомогательный материал:

1. Калькулятор без графического дисплея. При работе с калькулятором, в котором есть возможности программирования, запрещается использовать эти возможности. Использование калькулятора с графическим дисплеем или возможностей программирования может привести к тому, что экзамен будет аннулирован.
2. Листы с формулами (прилагаются).
3. Двухязычный словарь.

г. Особые указания:

1. Не переписывайте вопрос; отметьте только его номер.
2. Начинайте ответ на каждый вопрос с новой страницы. Запишите в тетради этапы решения (также и в том случае, когда вычисления производились с помощью калькулятора). Объясните все свои действия, включая вычисления, подробно, в ясной и упорядоченной форме. Недостаточно подробная запись решения может привести к тому, что оценка будет снижена или экзамен будет аннулирован.

יש לכתוב במחברת הבחינה בלבד. יש לרשום "טיוטה" בראש כל עמוד המשמש טיוטה.  
כתיבת טיוטה בדפים שאינם במחברת הבחינה עלולה לגרום לפסילת הבחינה.

Пишите только в экзаменационной тетради. Напишите слово «טיוטה» в начале каждой страницы, отведенной вами под черновик. Выполнение черновых записей на листах, не относящихся к экзаменационной тетради, может привести к тому, что экзамен будет аннулирован.

Желаем успеха!

בהצלחה!

### הוראות

- א. משך הבחינה: שעתיים וחצי.
- ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה:  
בשאלון זה שני פרקים, ובהם חמש שאלות.  
פרק ראשון – גאומטרייה אנליטית, וקטורים, טריגונומטרייה במרחב, מספרים מרוכבים  
פרק שני – גדילה ודעיכה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות  
יש לענות על שלוש שאלות, על שאלה אחת לפחות מכל פרק –  $3 \times 33\frac{1}{3} = 100$  נקודות.
- ג. חומר עזר מותר בשימוש:  
1. מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון שיש בו אפשרות תכנות. שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.  
2. דפי נוסחאות (מצורפים).  
3. מילון עברי-לועזי / לועזי-עברי.

ד. הוראות מיוחדות:

1. אין להעתיק את השאלה; יש לסמן את מספרה בלבד.
2. יש להתחיל כל שאלה בעמוד חדש. יש לרשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון. יש להסביר את כל הפעולות, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת. חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

## Вопросы

Ответьте на три из вопросов 1–5, по меньшей мере на один вопрос из каждого раздела (за каждый вопрос –  $33\frac{1}{3}$  балла).

**Обратите внимание:** если вы ответите более чем на три вопроса, будут проверены только первые три ответа в вашей тетради.

### Раздел первый – аналитическая геометрия, векторы, тригонометрия в пространстве, комплексные числа

1. Дан эллипс, заданный каноническим уравнением. Точка  $A(1, 3)$  лежит на этом эллипсе.

Координаты правого фокуса эллипса:  $(\sqrt{6.4}, 0)$ .

(а) Найдите уравнение этого эллипса.

Точка  $B$  – точка пересечения этого эллипса с положительной полуосью  $x$ .

Через точку  $A$  провели прямую, проходящую через начало координат, точку  $O$ .

Точка  $C$  – произвольная точка на прямой  $AO$ . Точка  $P$  – середина отрезка  $BC$ .

(б) Найдите геометрическое место всех точек  $P$ .

(в) Найдите уравнение окружности, которая касается найденного вами геометрического места и касается прямой  $AO$  в точке  $O$ .

2. На чертеже справа представлен прямоугольный параллелепипед  $ABCD A' B' C' D'$ .

Известно, что плоскость  $A' B' C' D'$  задана уравнением  $x + 4y - 8z - 142 = 0$

и что  $B(0, 7, 6)$ .

(а) Найдите длину ребра  $BB'$ .

Известно, что параметрическое представление прямой  $AB$

имеет вид  $\underline{x} = (0, 7, 6) + t(0, 2, 1)$ .

Длина ребра  $AB$  равна  $5\sqrt{5}$ , а координата  $y$  вершины  $A$  отрицательная.

(б) Найдите координаты вершины  $A$ .

(в) Найдите уравнение плоскости  $ABB'A'$ .

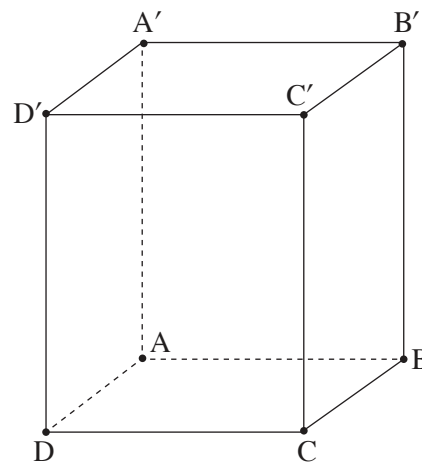
Дана точка  $M(k, 1, 3)$ ,  $k$  – положительный параметр.

Известно, что угол между прямой  $AB$  и прямой  $AM$  равен  $60^\circ$ .

(г) Найдите значение  $k$  (в ответе можно оставить знак корня).

Известно, что точка  $M$  лежит в плоскости  $DCC'D'$ .

(д) Найдите объем данного прямоугольного параллелепипеда.



3. (к) Покажите, что геометрическое место всех точек  $z = x + iy$  на гауссовой плоскости, для которых  $|z - 2i| = \frac{z - \bar{z}}{2i} + 2$ , является параболой, и найдите ее уравнение.

Дано комплексное число  $w = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ ,  $0^\circ < \theta < 90^\circ$ ,  $r > 0$ .

Дан выпуклый многоугольник I, вершины которого соответствуют решениям уравнения

$$z^4 = \frac{1}{r^4} \cdot (\cos(4\theta) + i \sin(4\theta)), \quad z - \text{комплексная переменная.}$$

- (а) Выразите все числа, соответствующие вершинам многоугольника I, в полярной форме, при помощи  $r$  и  $\theta$ .

Дан многоугольник II, вершины которого соответствуют числам  $-\frac{1}{w}$ ,  $\frac{1}{w}$ ,  $-w$ ,  $w$ .

- (б) Выразите все числа, соответствующие вершинам многоугольника II, в полярной форме, при помощи  $r$  и  $\theta$ .

Известно, что многоугольник II – ромб.

- (г) Найдите значение  $\theta$ .

Известно, что точка, соответствующая  $w$ , принадлежит геометрическому месту, найденному вами в пункте (к).

- (д) Найдите отношение площади многоугольника II к площади многоугольника I.

## Раздел второй – рост и затухание, показательные и логарифмические функции

4.  $f'(x)$  – производная функции  $f(x)$  .

$g(x)$  – функция, заданная как  $g(x) = e^{f(x)} \cdot f'(x)$  .

Функции  $f(x)$  ,  $f'(x)$  и  $g(x)$  определены в области  $x \neq 0$  .

Известно, что функция  $f(x)$  убывает в области  $x > 0$  и в области  $x < 0$

и что  $f'(x) \neq 0$  во всей области определения.

(\*) Запишите области положительных и отрицательных значений функции  $g(x)$  (если таковые существуют). Обоснуйте свой ответ.

Известно, что  $f(x) = \frac{1}{x}$  .

(а) (1) Найдите уравнение асимптот функции  $g(x)$  , перпендикулярных осям координат.

(2) Найдите координаты точки экстремума функции  $g(x)$  и определите ее тип.

(а) Начертите схематический график функции  $g(x)$  .

$a$  – параметр, больший 1 .

Известно, что площадь фигуры, ограниченной графиком функции  $g(x)$  , осью  $x$  и прямыми

$x = \frac{1}{\ln a}$  и  $x = \frac{1}{\ln(4a)}$  , равна 5 .

(г) Найдите значение  $a$  .

5. Дана функция  $f(x) = \frac{1}{x} \left( a + \frac{1}{(\ln x)^2} \right)$ .  $a$  – положительный параметр.

(а) Найдите область определения функции  $f(x)$ .

Известно, что у функции  $f(x)$  есть единственная точка экстремума, в которой  $x = \frac{1}{e}$ .

(б) Найдите значение  $a$ .

Подставьте  $a = 1$  в функцию  $f(x)$  и ответьте на вопросы пунктов (г)–(и).

$g(x)$  – это функция, для производной которой выполняется  $g'(x) = f(x)$ .

Область определения функции  $g(x)$  совпадает с областью определения функции  $f(x)$ .

Известно, что у функции  $g(x)$  есть точка перегиба, которая лежит на оси  $x$ .

(г) Найдите функцию  $g(x)$ , для которой выполняются эти условия.

Для найденной вами функции  $g(x)$  ответьте на вопросы пунктов (ж)–(и).

(ж) (1) Найдите уравнения асимптот функции  $g(x)$ , перпендикулярных осям координат (если таковые существуют).

(2) Найдите координаты точек пересечения графика функции  $g(x)$  с осью  $x$ .

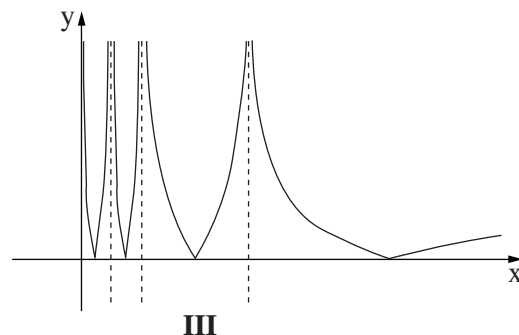
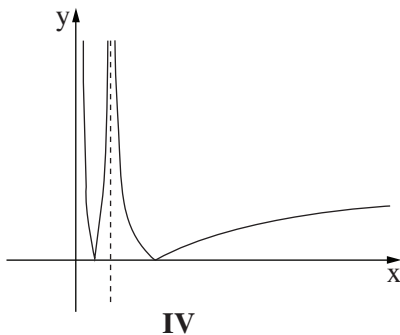
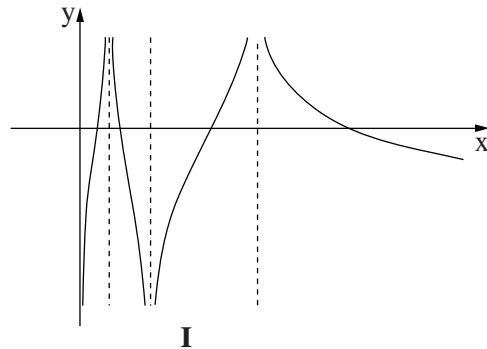
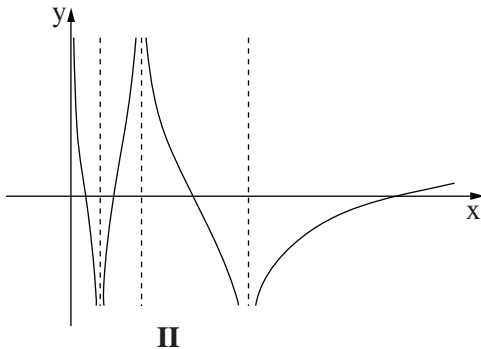
(3) Найдите области возрастания и убывания функции  $g(x)$  (если таковые существуют).

(з) Начертите схематический график функции  $g(x)$ .

Дана функция  $h(x) = \ln|g(x)|$ .

(и) (1) Найдите область определения функции  $h(x)$ .

(2) Один из приведенных ниже графиков I–IV соответствует функции  $h(x)$ . Определите, какой из них, и обоснуйте свой ответ.



**Желаем успеха!**

**בהצלחה!**

Авторские права принадлежат Государству Израиль.  
 Копировать или публиковать можно только  
 с разрешения Министерства просвещения.

זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל.  
 אין להעתיק או לפרסם  
 אלא ברשות משרד החינוך.