

Обратите внимание: в этом вопроснике есть специальные инструкции.
Отвечайте на вопросы, следуя этим инструкциям.

שימו לב: בבחינה זו יש הנחיות מיוחדות.
יש לענות על השאלות על פי הנחיות אלה.

מטמיקה

5 יחידות לימוד – הראון ראשון

מטמיקה

5 יחידות לימוד – הראון ראשון

הוראות

- א. משך הבחינה: ארבע שעות.
- ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה:
בשאלון זה שלושה פרקים, ובהם שמונה שאלות.
פרק ראשון – אלגברה והסתברות
פרק שני – גאומטריה וטריגונומטריה במישור
פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות
יש לענות על חמש שאלות, לפחות על שאלה אחת מכל פרק – $20 \times 5 = 100$ נקודות.

הוראות

- ג. חומר עזר מותר בשימוש:
1. מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון שיש בו אפשרות תכנות. שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.
2. דפי נוסחאות (מצורפים).
3. מילון עברי-לועזי / לועזי-עברי.

הוראות מיוחדות:

- ד. הוראות מיוחדות:
1. אין להעתיק את השאלה; יש לסמן את מספרה בלבד.
2. יש להתחיל כל שאלה בעמוד חדש. יש לרשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון. יש להסביר את כל הפעולות, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת. חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

יש לכתוב במחברת הבחינה בלבד. יש לרשום "טייטה" בראש כל עמוד המשמש טייטה. תתיבת טייטה בדפים שאינם במחברת הבחינה עלולה לגרום לפסילת הבחינה.

Пишите только в экзаменационной тетради. Напишите слово «טייטה» в начале каждой страницы, отведенной вами под черновик. Выполнение черновых записей на листах, не относящихся к экзаменационной тетради, может привести к тому, что экзамен будет аннулирован.

Желаем успеха!

בהצלחה!

Вопросы

Ответьте на пять из вопросов 1–8, по меньшей мере на один вопрос из каждого раздела (за каждый вопрос – 20 баллов).

Обратите внимание: если вы ответите более чем на пять вопросов, будут проверены только первые пять ответов в вашей тетради.

Раздел первый – алгебра и теория вероятности

1. Дорога между поселком А и поселком В делится на две части: отрезок городской дороги и отрезок скоростной трассы, как показано на чертеже.

Длина отрезка скоростной трассы в 7 раз больше длины отрезка городской дороги.



Две машины 'א, 'ב выехали одновременно и ехали навстречу друг другу: машина 'א выехала из поселка А, а машина 'ב выехала из поселка В.

В течение всего этого дня скорость каждой из машин на скоростной трассе была постоянной и была в два раза больше ее скорости на городской дороге. Машины встретились в середине отрезка АВ.

- (א) Найдите, во сколько раз скорость машины 'א на скоростной трассе больше скорости машины 'ב на скоростной трассе.

Когда машина 'א прибыла в поселок В, машина 'ב была на городской дороге, на расстоянии 18 км от поселка А.

- (ב) Найдите расстояние между поселком А и поселком В.

Когда машина 'א прибыла в поселок В, она немедленно выехала обратно в сторону поселка А, а когда машина 'ב прибыла в поселок А, она немедленно выехала обратно в сторону поселка В. На обратном пути машины встретились на отрезке скоростной трассы.

- (ג) Найдите, на каком расстоянии от поселка В встретились машины на обратном пути.

2. Дана геометрическая прогрессия A , члены которой a_1, a_2, a_3, \dots и в которой m членов (m – натуральное число, большее, чем 4).

Дано: все члены прогрессии A являются отрицательными;

сумма $m - 4$ последних членов прогрессии – это умноженная на 16 сумма $m - 4$ первых членов этой прогрессии.

(*) (1) Найдите знаменатель прогрессии A .

(2) Прогрессия A возрастает, убывает или не возрастает и не убывает? Обоснуйте свой ответ.

Продолжили прогрессию A так, что образовалась бесконечная геометрическая прогрессия.

Дана бесконечная прогрессия B , члены которой определены следующим образом: $b_n = \frac{k^n}{a_n}$ для любого натурального n . k – параметр, отличный от 0.

(*) Докажите, что прогрессия B – геометрическая прогрессия, и выразите ее знаменатель при помощи k .

Дано, что сумма прогрессии B является сходящейся [סגולה].

(*) Найдите возможную область значений k .

Дано: знаменатель прогрессии B равен $\frac{1}{4}$,
сумма прогрессии B равна -9 .

(*) Найдите значение k и значение b_1 .

Из прогрессии B удалили каждый третий член (b_3, b_6, b_9, \dots).

(*) Найдите сумму оставшихся членов.

3. В кувшине 'א' есть 10 красных шаров и 15 желтых шаров, а в кувшине 'ב' есть только красные шары.

Дана выбирает случайным образом кувшин и вынимает из него случайным образом шар.

Если этот шар желтый, она вынимает случайным образом второй шар из того же кувшина (без возвращения).

Если первый шар красный, она возвращает этот шар в кувшин и снова вынимает случайным образом шар из того же кувшина.

(*) Известно, что Дана вынула два шара одного и того же цвета. Какова вероятность того, что оба эти шара желтые?

Дана возвращает в кувшин шары, которые она вынула.

Яэль выполняет следующую последовательность действий:

она выбирает случайным образом кувшин, вынимает из него случайным образом один шар и возвращает его в тот же кувшин.

Яэль прекратит повторять эту последовательность действий после того, как она вынет красный шар и вернет его в кувшин.

(*) Найдите вероятность того, что Яэль выполнила эту последовательность действий в точности 6 раз.

Часть шаров перенесли из кувшина 'ב' в кувшин 'א'.

После этого выбрали случайным образом кувшин и вынули из него случайным образом один шар.

Дано, что после переноса шаров вероятность того, что выбранный шар был красным, равна $\frac{19}{24}$.

- 05 (*) Возможно ли, что до переноса в кувшине 'ב' было 10 шаров? Обоснуйте свой ответ.

/продолжение на странице 4/

Раздел второй – геометрия и тригонометрия на плоскости

4. В четырехугольнике BKCD сторона KB параллельна стороне CD .

Сторона CD – хорда в окружности, а сторона KB касается этой окружности в точке K .

Сторона BD пересекает эту окружность в точке A .

Диагональ BC пересекает хорду AK в точке E (смотрите чертеж).

(а) Докажите, что $\triangle ABK \sim \triangle AKC$.

(б) Докажите, что $\frac{AB}{AC} = \frac{BE}{CE}$.

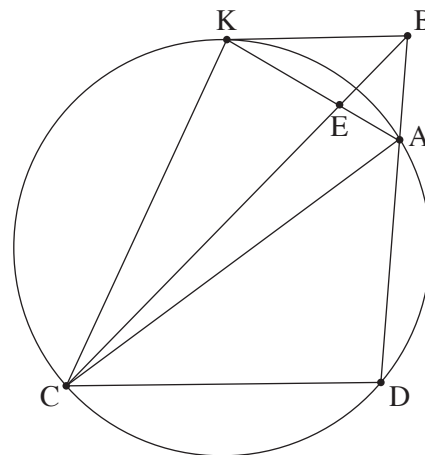
Дано: $BE = \frac{1}{4}CE$.

(в) Найдите отношение $\frac{AK}{AB}$.

Дано: площадь четырехугольника ABKC равна 18 .

Обозначим через S площадь треугольника AEB .

(г) Выразите при помощи S площадь треугольника KEC .



5. Дана окружность с центром O и радиусом R .

Из точки A провели две прямые AB и AC , касательные к этой окружности.

Точка E – точка касания прямой AC и окружности, как показано на чертеже.

Дано: $BO \perp AO$, $AE = CE$.

Обозначим через 2β угол BAC .

(а) Выразите при помощи R и β длину AB .

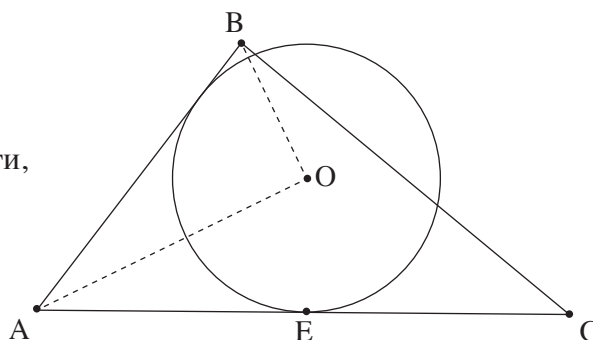
Дано, что длина AB равна $2.5R$, а угол BAC острый.

(б) Найдите значение β .

(в) Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника AOB .

Дано, что длина радиуса окружности, описанной вокруг треугольника ABC , равна 8 .

(г) Найдите значение R .



Раздел третий – дифференциальное и интегральное исчисление полиномов, функций, содержащих корни, рациональных функций и тригонометрических функций

6. Дано, что $f'(x) = \frac{-4x}{(x^2 - a^2)^3}$ является производной функции $f(x)$. a – положительный параметр.

У функций $f(x)$ и $f'(x)$ одна и та же область определения.

В пунктах (א)–(ג) выразите свои ответы при помощи a , если это необходимо.

(א) Найдите область определения производной $f'(x)$.

(ב) Найдите области возрастания и убывания функции $f(x)$.

Дано, что у функции $f(x)$ есть горизонтальная асимптота, уравнение которой $y = 0$.

(ג) Найдите функцию $f(x)$, для которой выполняются эти условия.

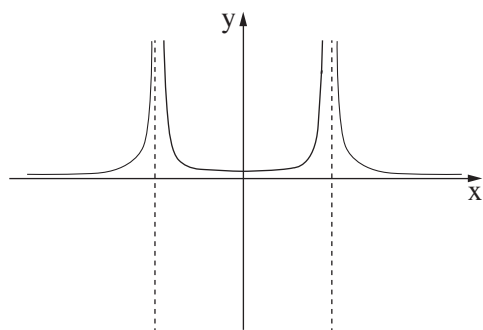
Даны функция $g(x) = \frac{x-a}{(x^2-a^2)^2}$ и функция $h(x) = \frac{(x-a)^2}{(x^2-a^2)^2}$.

У функций $f(x)$, $g(x)$ и $h(x)$ одна и та же область определения.

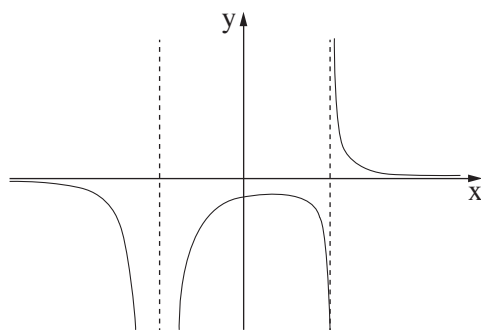
(ד) Для каждой из функций $f(x)$, $g(x)$ и $h(x)$ найдите подходящий ей график из графиков I–IV, приведенных в конце вопроса. Обоснуйте свои ответы.

Дано, что у функции $h(x-6)$ есть асимптота, уравнение которой $x = 0.25a$.

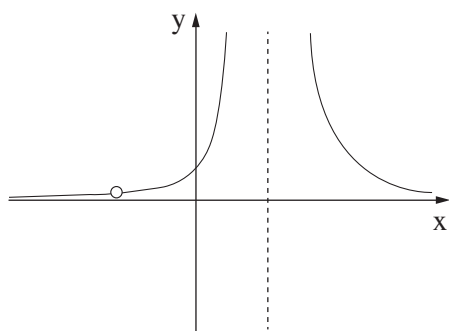
(ה) Найдите значение a .



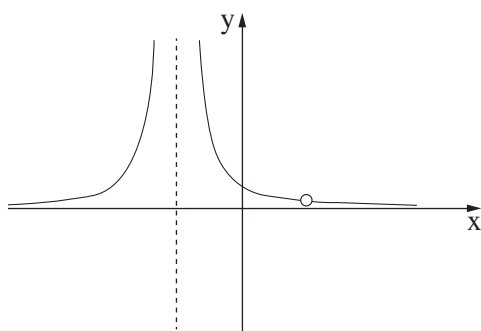
II



I



IV



III

7. Дана функция $f(x) = \cos x + \frac{2}{(\cos x)^2} + a$ в области $-\frac{3\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$.

a – параметр.

(א) Найдите область определения функции $f(x)$.

(ב) Функция $f(x)$ четная или нечетная? Обоснуйте свой ответ.

Дано, что график функции $f(x)$ касается прямой $y = 2$ в двух точках.

(ג) Найдите значение a .

Подставьте $a = 1$ и ответьте на вопросы пунктов (ד)–(ו).

(ד) Найдите координаты точек экстремума функции $f(x)$ и определите их тип.

(ה) Начертите схематический график функции $f(x)$.

Даны функция $g(x) = f(x) - k$ и функция $h(x) = \frac{1}{g(x)}$, обе в области $-\frac{3\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$.

k – параметр, $k \neq 2$, $k \neq 4$.

(ו) Найдите значение k , для которого график функции $g(x)$ и график функции $h(x)$ пересекаются в каждой из точек их экстремума.

8. Дана функция $f(x) = x\sqrt{21-x}$.

(א) (1) Найдите область определения функции $f(x)$.

(2) Найдите области положительных и области отрицательных значений функции $f(x)$.

Известно, что у функции $f(x)$ есть одна точка внутреннего экстремума и нет точек перегиба.

(ב) Начертите схематический график функции $f(x)$.

Точка A находится в первом квадранте на графике функции $f(x)$.

Точка C – точка пересечения графика функции $f(x)$ с положительной частью оси x .

Из точки A провели два перпендикуляра:

один перпендикуляр к оси x , который пересекает ее в точке B , а другой перпендикуляр к прямой $x = 21$, который пересекает ее в точке D .

(ג) Найдите координаты точки A , для которой периметр прямоугольника $ABCD$ будет максимальным.

Желаем успеха!

Авторские права принадлежат Государству Израиль.
Копировать или публиковать можно только
с разрешения Министерства просвещения.

בהצלחה!

זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל.
אין להעתיק או לפרסם
אלא ברשות משרד החינוך.