

## Математика

### 5 единиц обучения – первый вопросник

## מתמטיקה

### 5 יחידות לימוד – שאלון ראשון

#### Указания

- а. Продолжительность экзамена: 3 часа 30 минут.
- б. Строение вопросника и ключ к оценке:  
 В этом вопроснике три раздела, и в них восемь вопросов.  
 Раздел первый – алгебра и теория вероятностей  
 Раздел второй – геометрия и тригонометрия на плоскости  
 Раздел третий – дифференциальное и интегральное исчисление полиномов, функций, содержащих корни, рациональных функций и тригонометрических функций  
 Следует ответить на пять вопросов, по меньшей мере на один вопрос из каждого раздела –  $5 \times 20 = 100$  баллов.

в. Разрешенный вспомогательный материал:

1. Калькулятор без графического дисплея. При работе с калькулятором, в котором есть возможности программирования, запрещается использовать эти возможности. Использование калькулятора с графическим дисплеем или возможностей программирования может привести к тому, что экзамен будет аннулирован.
2. Листы с формулами (прилагаются).
3. Двухязычный словарь.

г. Особые указания:

1. Не переписывайте вопрос; отметьте только его номер.
2. Начинайте ответ на каждый вопрос с новой страницы. Запишите в тетради этапы решения (также и в том случае, когда вычисления производились с помощью калькулятора).  
 Объясните все свои действия, включая вычисления, подробно, в ясной и упорядоченной форме. Недостаточно подробная запись решения может привести к тому, что оценка за экзамен будет снижена или экзамен будет аннулирован.

יש לכתוב במחברת הבחינה בלבד. יש לרשום "טייטה" בראש כל עמוד המשמש טייטה.  
 תתיבת טייטה בדפים שאינם במחברת הבחינה עלולה לגרום לפסילת הבחינה.

Пишите только в экзаменационной тетради. Напишите слово «טייטה» в начале каждой страницы, отведенной вами под черновик. Выполнение черновых записей на листах, не относящихся к экзаменационной тетради, может привести к тому, что экзамен будет аннулирован.

Желаем успеха!

בהצלחה!

#### הוראות

- א. משך הבחינה: שלוש שעות וחצי.
- ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה:  
 בשאלון זה שלושה פרקים, ובהם שמונה שאלות.  
 פרק ראשון – אלגברה והסתברות  
 פרק שני – גאומטרייה וטריגונומטרייה במישור  
 פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות  
 יש לענות על חמש שאלות, על שאלה אחת לפחות מכל פרק –  $20 \times 5 = 100$  נקודות.
- ג. חומר עזר מותר בשימוש:  
 1. מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון שיש בו אפשרות תכנות. שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.  
 2. דפי נוסחאות (מצורפים).  
 3. מילון עברי-לועזי / לועזי-עברי.
- ד. הוראות מיוחדות:  
 1. אין להעתיק את השאלה;  
 יש לסמן את מספרה בלבד.  
 2. יש להתחיל כל שאלה בעמוד חדש.  
 יש לרשום במחברת את שלבי הפתרון,  
גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.  
 יש להסביר את כל הפעולות, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת. חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

## Вопросы

Ответьте на пять из вопросов 1–8, по меньшей мере на один вопрос из каждого раздела (за каждый вопрос – 20 баллов).

**Обратите внимание:** если вы ответите более чем на пять вопросов, будут проверены только первые пять ответов в вашей тетради.

### Раздел первый – алгебра и теория вероятностей

1. Ханан и Нир шли из поселка 'א в поселок 'ב по одному и тому же маршруту. Ханан вышел в 8:00 и всю дорогу шел со скоростью  $v$  км/час. Нир вышел в 8:30 и всю дорогу шел со скоростью, большей скорости Ханана на 2 км/час.

Ханан и Нир встретились по дороге в поселок 'ב. Через один час и сорок минут после этой встречи Нир пришел в поселок 'ב.

(א) Покажите, что расстояние между поселком 'א и поселком 'ב составляет  $\frac{1}{4}v^2 + \frac{13}{6}v + \frac{10}{3}$ .

Ханан пришел в поселок 'ב в 12:00.

Известно, что расстояние между поселком 'א и поселком 'ב больше, чем 15 км.

(ב) Найдите значение  $v$ .

Когда Нир пришел в поселок 'ב, он немедленно вышел обратно в сторону поселка 'א с той же скоростью, с которой он шел прежде.

(ג) Найдите, на каком расстоянии от поселка 'א был Нир в то время, когда Ханан пришел в поселок 'ב.

2. Дана бесконечная геометрическая прогрессия  $a_n$ , все члены которой отличны от нуля.

Знаменатель этой прогрессии  $q$ ,  $q \neq 1$ .

Дана также последовательность  $b_n$ , члены которой определены как  $b_n = a_1 + n \cdot \left( \frac{a_{n+2}}{a_n} - \frac{a_{n+1}}{a_n} \right)$  для любого натурального  $n$ .

(א) Докажите, что последовательность  $b_n$  – это арифметическая прогрессия и что ее разность равна  $q^2 - q$ .

Известно, что прогрессия  $b_n$  убывает и  $a_1$  – положительное число.

(ב) Определите: прогрессия  $a_n$  возрастает, убывает или не возрастает и не убывает. Обоснуйте свой ответ.

Дано, что сумма прогрессии  $a_n$  равна 128.

(ג) Выразите  $a_1$  и  $b_1$  при помощи  $q$ .

Известно, что сумма 7 первых членов прогрессии  $b_n$  равна 441.

(ד) Найдите значение  $q$ .

3. В одной большой городской школе в параллели  $n$  часть учеников – вожатые в молодежном движении, а остальные вожатыми не являются.

В этой параллели часть учеников имеют водительские права, а у остальных водительских прав нет.

Половина учеников, имеющих водительские права, – вожатые в молодежном движении.

Процент учеников-вожатых среди учеников, имеющих права, равен проценту учеников без водительских прав среди учеников-вожатых.

Случайным образом выбирают ученика из этой параллели.

Вероятность того, что выбранный ученик – вожатый или что у него есть права, равна 0.45 .

(а) Найдите, сколько процентов учеников этой параллели – вожатые.

(б) Случайным образом выбирают ученика из числа учеников без водительских прав.

Какова вероятность того, что этот ученик – вожатый?

Случайным образом выбирают 5 учеников из числа тех, у кого нет водительских прав.

(а) (1) Какова вероятность того, что было выбрано более одного вожатого?

(2) Известно, что было выбрано более одного вожатого. Какова вероятность, что число выбранных вожатых – четное?

## Раздел второй – геометрия и тригонометрия на плоскости

4. На чертеже ниже изображен тупоугольный треугольник  $ABC$ , вписанный в окружность.

Точка  $K$  – такая точка на продолжении стороны  $AB$ ,  
 что  $AB = BK$ .

Продолжение отрезка  $KC$  пересекает эту окружность  
 в дополнительной точке, точке  $F$ .

Дано:  $\sphericalangle BAC = \sphericalangle BCA$ .

(⌘) Докажите, что  $AF$  – диаметр окружности.

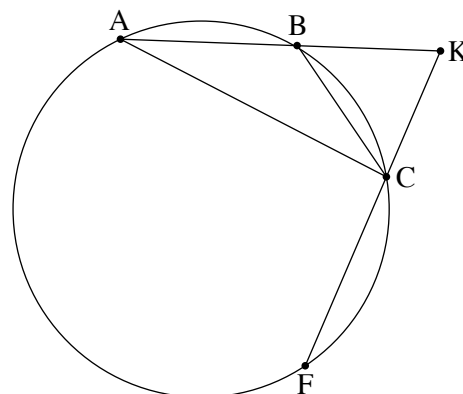
Хорды  $BF$  и  $AC$  пересекаются в точке  $D$ .

(Ⓜ) Докажите, что треугольник  $ADK$  – равнобедренный.

(Ⓝ) (1) Докажите, что четырехугольник  $BDCK$  можно вписать в окружность.

(2) Докажите, что  $\sphericalangle DKC = \sphericalangle FAC$ .

(Ⓣ) Докажите, что  $AC \cdot AD = KC \cdot AF$ .



5. На чертеже ниже изображен дельтоид [דלתון]  $ABCD$  ( $AB = AD$ ,  $CB = CD$ ).

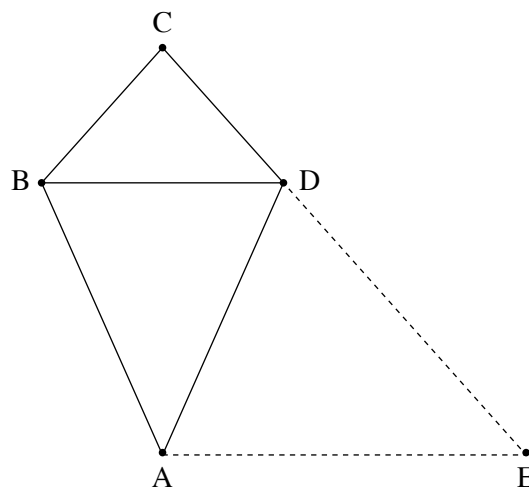
Дано:  $\sphericalangle BAD = \sphericalangle CDB = 2\alpha$ ,  $0^\circ < \alpha < 45^\circ$ .

Обозначим:  $AB = k$ .

(⌘) Выразите при помощи  $k$  и  $\alpha$  радиус  
 окружности, описанной вокруг  
 треугольника  $CDB$ .

Известно, что радиус окружности, описанной вокруг  
 треугольника  $ABD$ , в  $\frac{4}{3}$  раза больше радиуса  
 окружности, описанной вокруг треугольника  $CDB$ .

(Ⓜ) Найдите величину угла  $BAD$ .



Точка  $O$  – центр окружности, описанной вокруг треугольника  $ABD$ .

Через точку  $A$  провели прямую, параллельную  $BD$  и пересекающую продолжение  
 стороны  $CD$  в точке  $E$ .

Известно, что площадь треугольника  $AOE$  равна  $70$ .

(Ⓝ) Найдите значение  $k$ .

## Раздел третий – дифференциальное и интегральное исчисление полиномов, функций, содержащих корни, рациональных функций и тригонометрических функций

6. Дана функция  $f(x) = \frac{\sqrt{5x^2 - kx}}{x^3}$ ,  $k$  – положительный параметр.

(к) Выразите при помощи  $k$  область определения функции  $f(x)$ .

Дана функция  $h(x) = -f(x)$ .

Координата  $x$  точки пересечения графика функции  $f(x)$  с графиком функции  $h(x)$  равна 1.6.

(а) Найдите значение  $k$ .

Подставьте  $k = 8$  в функцию  $f(x)$  и ответьте на вопросы пунктов (а)–(г).

(а) (1) Найдите уравнения асимптот функции  $f(x)$ , перпендикулярных осям координат.

(2) Найдите координаты всех точек экстремума функции  $f(x)$  и определите их тип.

(3) Начертите схематический график функции  $f(x)$ .

Дана функция  $g(x) = (f(x))^2$ , область определения которой совпадает с областью определения функции  $f(x)$ .

(г) Начертите схематический график функции  $g(x)$ .

$a$  – параметр, больший 2.

(н) Значение выражения  $\int_a^{a+1} g(x) dx$  равно, больше или меньше значения выражения  $\int_a^{a+1} f(x) dx$ ? Обоснуйте свой ответ.

(и) Вычислите площадь фигуры, ограниченной графиком функции  $g(x)$ , осью  $x$  и прямыми  $x = 2$  и  $x = 6$ .

7. Дана функция  $f(x) = (\sin x)^2 + \cos x - 1$ , определенная на интервале  $-\pi \leq x \leq \pi$ .

(к) Докажите, что функция  $f(x)$  – четная.

(а) (1) Найдите координаты точек пересечения графика функции  $f(x)$  с осью  $x$ .

(2) Найдите координаты всех точек экстремума функции  $f(x)$  и определите их тип.

(б) Начертите схематический график функции  $f(x)$ .

Дана функция  $g(x) = \frac{1}{f(x) + b}$ ,  $b$  – параметр.

Известно, что у функции  $g(x)$  есть ровно две вертикальные асимптоты.

(г) Напишите два возможных значения  $b$ , одно из которых положительное, а другое отрицательное.

Подставьте в функцию  $g(x)$  найденное вами отрицательное значение  $b$  и ответьте на вопросы пунктов (н)–(и).

(н) (1) Найдите область определения функции  $g(x)$ .

(2) Найдите координаты всех точек экстремума функции  $g(x)$  и определите их тип.

(и) Начертите схематический график функции  $g(x)$ .

8. Дана функция  $f(x) = kx^3 - 3x^2 + 8kx$ , определенная для любого  $x$ .

$k$  – параметр, отличный от  $0$ .

Точка  $A$  – это точка перегиба функции  $f(x)$ .

(\*) Выразите с помощью  $k$  координаты точки  $A$ .

Известно, что точка  $A$  лежит в первом квадранте.

(\*) Найдите возможную область значений  $k$ .

Через точку  $A$  провели перпендикуляр к оси  $x$ , пересекающий ее в точке  $B$ , и перпендикуляр к оси  $y$ , пересекающий ее в точке  $C$ .

Дан квадрат  $I$ , длина стороны которого равна длине отрезка  $AB$ , и квадрат  $II$ , длина стороны которого равна длине отрезка  $AC$ .

(\*) Найдите значение  $k$ , для которого сумма площадей квадратов  $I$  и  $II$  минимальна

(в ответе можно оставить знак корня).

**Желаем успеха!**

Авторские права принадлежат Государству Израиль.  
Копировать или публиковать можно только  
с разрешения Министерства просвещения.

**בהצלחה!**

זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל.  
אין להעתיק או לפרסם  
אלא ברשות משרד החינוך.