

**Обратите внимание:** в этом вопроснике есть специальные инструкции. Отвечайте на вопросы, следуя этим инструкциям.

**שימו לב:** בבחינה זו יש הנחיות מיוחדות. יש לענות על השאלות על פי הנחיות אלה.

## מ ת מ ט י ק ה

5 יחידות לימוד – שאלון שני

### הוראות

- א. משך הבחינה: שעותיים וארבעים וחמש דקות.
- ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה:
- בשאלון זה שני פרקים, ובהם חמש שאלות.
- פרק ראשון – גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב, מספרים מרוכבים
- פרק שני – גדילה ודעיכה, פונקציות חזקה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות
- יש לענות על שלוש שאלות, לפחות על שאלה אחת מכל פרק –  $3 \times 33\frac{1}{3} = 100$  נקודות.

- ג. חומר עזר מותר בשימוש:
1. מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון שיש בו אפשרות תכנות. שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.
  2. דפי נוסחאות (מצורפים).
  3. מילון עברי-לועזי / לועזי-עברי.

- ד. הוראות מיוחדות:
1. אין להעתיק את השאלה; יש לסמן את מספרה בלבד.
  2. יש להתחיל כל שאלה בעמוד חדש. יש לרשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון. יש להסביר את כל הפעולות, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת. חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

יש לכתוב במחברת הבחינה בלבד. יש לרשום "טייטה" בראש כל עמוד המשמש טייטה. כתיבת טייטה בדפים שאינם במחברת הבחינה עלולה לגרום לפסילת הבחינה.

Пишите только в экзаменационной тетради. Напишите слово «טייטה» в начале каждой страницы, отведенной вами под черновик. Выполнение черновых записей на листах, не относящихся к экзаменационной тетради, может привести к тому, что экзамен будет аннулирован.

## Вопросы

Ответьте на три из вопросов 1–5, по меньшей мере на один вопрос из каждого раздела (за каждый вопрос –  $33\frac{1}{3}$  балла).

**Обратите внимание:** если вы ответите более чем на три вопроса, будут проверены только первые три ответа в вашей тетради.

### Раздел первый – аналитическая геометрия, векторы, тригонометрия в пространстве, комплексные числа

1. Даны точки  $A(-9a, 0)$  и  $B(41a, 0)$ .  $a$  – положительный параметр.

Для точки  $P$  выполняется  $\sphericalangle APB = 90^\circ$ .

- (**ж**) Покажите, что геометрическое место всех точек  $P$ , полученных таким образом, лежит на окружности, и найдите ее уравнение. Выразите свой ответ при помощи  $a$ .

Дано: максимальная площадь треугольника  $APB$  равна 156.25.

- (**з**) Найдите значение  $a$ .

Подставьте  $a = \frac{1}{2}$  и ответьте на вопросы пунктов (**д**)–(**з**).

Середина отрезка  $AB$  является фокусом параболы, заданной каноническим уравнением.

Эта парабола и найденная вами окружность пересекаются в первом квадранте в точке  $C$ .

- (**д**) Найдите координаты точки  $C$ .

Прямая  $\ell$  касается параболы в точке  $C$ .

Проводят касательную к найденной вами окружности.

Дано, что эта касательная параллельна прямой  $\ell$ .

- (**е**) Найдите расстояние между прямой  $\ell$  и касательной к окружности (найдите два возможных ответа).

2. На чертеже справа представлена треугольная пирамида  $SABC$ . Точка  $E$  – середина ребра  $BC$ .

Обозначим:  $\overrightarrow{AE} = \underline{u}$ ,  $\overrightarrow{EC} = \underline{v}$ .

Дано:  $|\underline{u} + \underline{v}| = |\underline{u} - \underline{v}|$ .

(\*) Докажите, что  $\overrightarrow{AE}$  перпендикулярен  $\overrightarrow{BC}$ .

Дано: отрезок  $SE$  является высотой пирамиды, его длина равна 16.

$A(0, 0, 0)$ ,  $B(6, 8, 0)$ .

Вершина  $C$  лежит на положительной части оси  $x$ ,  
координата  $z$  вершины  $S$  является положительной.

(\*) Найдите координаты вершин  $C$  и  $S$ .

Точка  $F$  – такая точка на ребре  $SC$ , что  $\overrightarrow{SF} = \frac{1}{4}\overrightarrow{SC}$ .

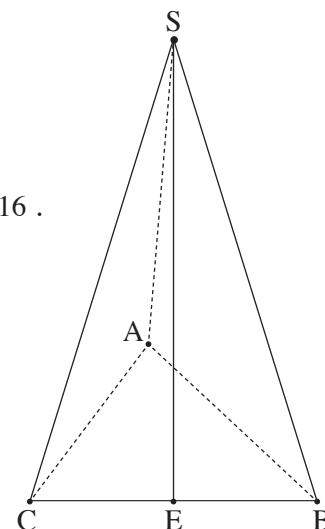
Через точку  $F$  проводят прямую, параллельную прямой  $AC$  и пересекающую плоскость  $ABS$  в точке  $M$ .

(\*) (1) Найдите параметрическое представление прямой  $FM$ .

(2) Найдите координаты точки  $M$ .

(\*) Найдите, во сколько раз объем пирамиды  $MABC$  больше объема пирамиды  $FAEC$ .

Обоснуйте свой ответ.



3. Дано комплексное число  $w = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ ,  $r > 0$ ,  $90^\circ < \theta < 180^\circ$ .

(\*) Выразите при помощи  $r$  и  $\theta$  полярное представление числа  $\frac{1}{w}$ .

Точка  $A$  на гауссовой плоскости представляет число  $w$ , а точка  $B$  представляет число  $\frac{1}{w}$ .

Точка  $O$  – начало координат.

Дано, что площадь треугольника  $AOB$  равна  $\frac{\sqrt{2}}{4}$ , а угол  $AOB$  острый.

(\*) Найдите значение  $\theta$ .

Даны два уравнения: I.  $z^8 = w^8$

II.  $z^8 = (w \cdot \bar{w})^4$

$z$  – комплексное число.

Дан выпуклый многоугольник, вершинами которого являются все точки, представляющие решения уравнения I, а также все точки, представляющие решения уравнения II.

(\*) (1) Найдите, сколько вершин у этого многоугольника.

(2) Можно ли утверждать, что все вершины многоугольника лежат на одной окружности с центром в точке начала координат? Обоснуйте свой ответ.

Дано, что площадь многоугольника равна 62.

(\*) Найдите значение  $r$ .

## Раздел второй – рост и затухание, степенные функции, показательные и логарифмические функции

4. Дана функция  $f(x) = e^x - \frac{1}{1 - e^x}$ . Функция  $f(x)$  определена для любого  $x \neq 0$ .

- (⌘) (1) Найдите уравнения асимптот функции  $f(x)$ , перпендикулярных осям координат.
- (2) Есть ли у графика функции  $f(x)$  точки пересечения с осями координат? Обоснуйте свой ответ.
- (3) Найдите координаты точки экстремума функции  $f(x)$  и определите ее тип.
- (▢) Начертите схематический график функции  $f(x)$ .

Дана функция  $g(x) = -x + \ln(e^x - 1)$ .

- (Ⓐ) (1) Найдите область определения функции  $g(x)$ .
- (2) Покажите, что  $g'(x) = f(x) - e^x$  для любого  $x$  из области определения функции  $g(x)$ .

Из точки экстремума функции  $f(x)$  проводят перпендикуляр к оси  $x$ .

- (⌚) Найдите площадь фигуры, ограниченной графиком функции  $f(x)$ , осью  $x$ , данным перпендикуляром и прямой  $x = \ln(b)$ .

$b > 2$  – параметр. Выразите свой ответ при помощи  $b$ .

Дано, что площадь, найденная вами в пункте (⌚), равна  $b - 2 + \ln(1.5)$ .

- (⌚) Найдите значение  $b$ .

5. Дана функция  $f(x) = \frac{a + \ln x}{x}$ , определенная в области  $x > 0$ .  $a$  – параметр.

(א) При необходимости в подпунктах (1)–(3) выразите свои ответы при помощи  $a$ .

(1) Найдите уравнения асимптот функции  $f(x)$ , перпендикулярных осям координат.

(2) Найдите координаты точки пересечения графика функции  $f(x)$  с осью  $x$ .

(3) Найдите координаты точки экстремума функции  $f(x)$  и определите ее тип.

(ב) Начертите схематический график функции  $f(x)$ .

Дана функция  $g(x) = \frac{1}{x}$ , определенная в области  $x \neq 0$ .

Дано, что график функции  $f(x)$  и график функции  $g(x)$  пересекаются в точке, в которой  $x = e^2$ .

(ג) Найдите значение  $a$ .

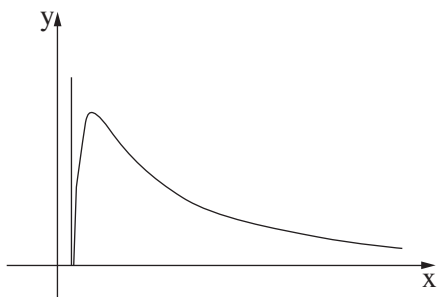
Подставьте найденное вами значение  $a$  и ответьте на вопросы пунктов (ד)–(ה).

Дана функция  $h(x)$ , определенная в области  $x > 0$ . График функции  $h(x)$  проходит через точку  $(e^5, 2.5)$ .

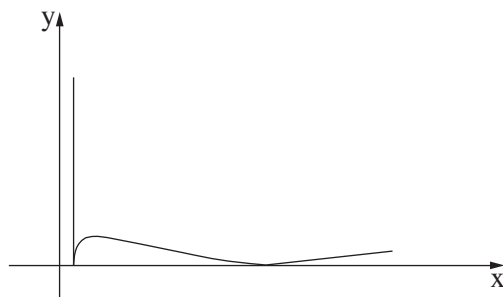
Для производной функции  $h(x)$  выполняется:  $h'(x) = f(x) - g(x)$ .

(ד) Найдите функцию  $h(x)$ .

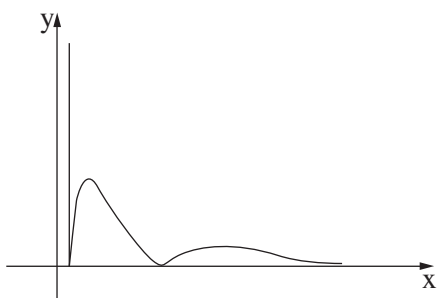
(ה) Определите, какой из графиков I–IV представляет функцию  $|h(x)|$ . Обоснуйте свой ответ.



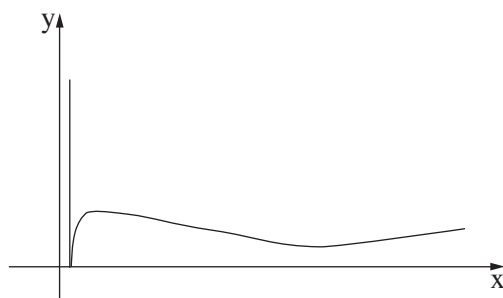
II



I



IV



III

**Желаем успеха!**

Авторские права принадлежат Государству Израиль.  
 Копировать или публиковать можно только  
 с разрешения Министерства просвещения.

**בהצלחה!**

זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל.  
 אין להעתיק או לפרסם  
 אלא ברשות משרד החינוך.