

תוכנית חדשה

Обратите внимание: в этом вопроснике есть специальные инструкции. Отвечайте на вопросы, следуя этим инструкциям.

שימו לב: בבחינה זו יש הנחיות מיוחדות. יש לענות על השאלות על פי הנחיות אלה.

Математика

5 единиц обучения – первый вопросник

מתמטיקה

5 יחידות לימוד – שאלון ראשון

Указания

а. Продолжительность экзамена: 4 часа 15 минут.

б. Строение вопросника и ключ к оценке:

В этом вопроснике четыре раздела, и в них восемь вопросов.

Раздел первый – короткие вопросы

Раздел второй – индукция, последовательности и теория вероятности

Раздел третий – геометрия и тригонометрия на плоскости

Раздел четвертый – дифференциальное и интегральное

исчисление полиномов, функций, содержащих корни, рациональных функций и тригонометрических функций

Вы должны ответить на пять вопросов, по меньшей мере на один вопрос из первого или второго раздела и по меньшей мере на один вопрос из каждого из следующих разделов – третьего и четвертого.

$5 \times 20 = 100$ баллов.

в. Разрешенный вспомогательный материал:

1. Калькулятор без графического дисплея. При работе с калькулятором, в котором есть возможности программирования, запрещается использовать эти возможности. Использование калькулятора с графическим дисплеем или возможностей программирования может привести к тому, что экзамен будет аннулирован.

2. Листы с формулами (прилагаются).

3. Двухязычный словарь.

г. Особые указания:

1. Не переписывайте вопрос; отметьте только его номер.

2. Начинайте ответ на каждый вопрос с новой страницы.

Запишите в тетради этапы решения (также и в том случае, когда вычисления производились с помощью калькулятора).

Объясните все свои действия, включая вычисления, подробно, в ясной и упорядоченной форме. Недостаточно подробная запись решения может привести к тому, что оценка за экзамен будет снижена или экзамен будет аннулирован.

יש לכתוב במחברת הבחינה בלבד. יש לרשום "טייטה" בראש כל עמוד המשמש טייטה.

כתיבת טייטה בדפים שאינם במחברת הבחינה עלולה לגרום לפסילת הבחינה.

Пишите только в экзаменационной тетради. Напишите слово «טייטה» в начале каждой страницы, отведенной вами под черновик. Выполнение черновых записей на листах, не относящихся к экзаменационной тетради, может привести к тому, что экзамен будет аннулирован.

הוראות

א. משך הבחינה: ארבע שעות ורבע.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה:

בשאלון זה ארבעה פרקים, ובהם שמונה שאלות.

פרק ראשון – שאלות קצרות

פרק שני – אינדוקציה, סדרות והסתברות

פרק שלישי – גאומטרייה וטריגונומטרייה במישור

פרק רביעי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי

של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות

רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות

יש לענות על חמש שאלות, על שאלה אחת לפחות מן

הפרק הראשון או השני ועל שאלה אחת לפחות

מכל אחד מן הפרקים השלישי והרביעי.

$20 \times 5 = 100$ נקודות.

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

1. מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות

התכנות במחשבון שיש בו אפשרות תכנות.

שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות

במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.

2. דפי נוסחאות (מצורפים).

3. מילון עברי-לועזי / לועזי-עברי.

ד. הוראות מיוחדות:

1. אין להעתיק את השאלה;

יש לסמן את מספרה בלבד.

2. יש להתחיל כל שאלה בעמוד חדש.

יש לרשום במחברת את שלבי הפתרון,

גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.

יש להסביר את כל הפעולות, כולל חישובים,

בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת. חוסר פירוט

עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

Вопросы

Ответьте на пять из вопросов 1–8, по меньшей мере на один вопрос из первого или второго раздела и по меньшей мере на один вопрос из каждого из следующих разделов – третьего и четвертого (за каждый вопрос – 20 баллов).

Обратите внимание: если вы ответите более чем на пять вопросов, будут проверены только первые пять из ответов в вашей тетради.

Раздел первый – короткие вопросы

1. Ответьте на вопросы двух из пунктов (κ)–(τ), приведенных ниже.

Если вы ответите более чем на два пункта, будут проверены только первые два из ответов в вашей тетради.

(κ) Дано, что равенство $8 + 24 + 48 + \dots + n(n + 2) = \frac{n(n + a)(n + 4)}{6}$ выполняется для $n = 2$.
 a – параметр.

(1) Найдите значение a .

(2) Для значения a , которое вы нашли, докажите методом индукции или любым другим способом, что данное равенство выполняется для любого четного натурального n .

(α) Все абитуриенты университета сдают два вступительных экзамена.

Известно, что число абитуриентов, которые успешно сдали только первый экзамен,

в 4 раза меньше числа абитуриентов, которые успешно сдали оба экзамена.

$\frac{8}{9}$ абитуриентов, которые успешно сдали второй экзамен, успешно сдали также первый экзамен.

Обозначим через p вероятность выбрать случайным образом абитуриента, который успешно сдал только первый экзамен.

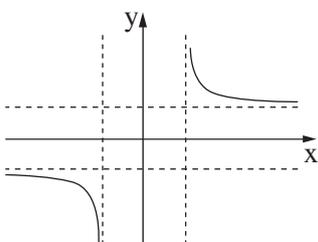
(1) Выразите при помощи p вероятность выбрать случайным образом абитуриента, который успешно сдал по меньшей мере один экзамен.

(2) Известно, что случайным образом выбран абитуриент, которые успешно сдал по меньшей мере один экзамен.

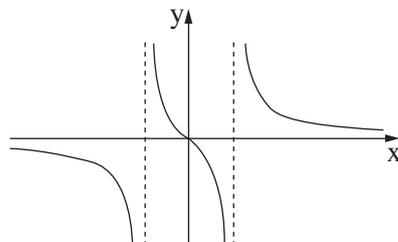
Какова вероятность того, что выбранный абитуриент успешно сдал оба экзамена?

(א) Даны функции: $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$, $g(x) = \frac{\sqrt{x}}{x^2-1}$, $h(x) = \sqrt{\frac{x}{x^2-1}}$.

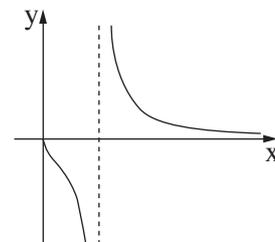
- (1) Найдите область определения каждой из функций $f(x)$, $g(x)$ и $h(x)$.
 (2) Для каждой из функций $f(x)$, $g(x)$ и $h(x)$ найдите соответствующий ей график из графиков 1–5, представленных ниже. Обоснуйте свой ответ.



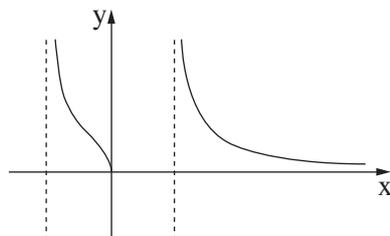
3



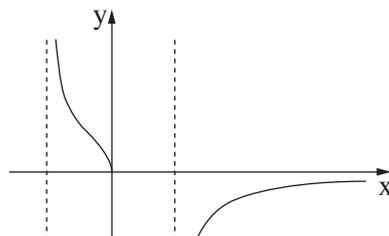
2



1



5



4

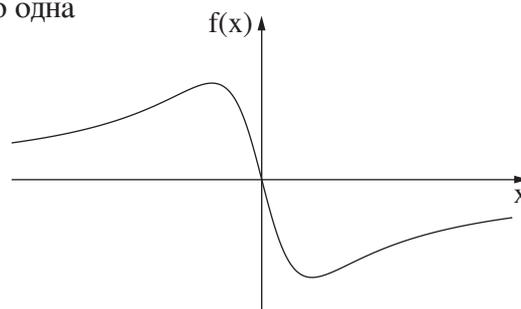
(7) Функция $f(x)$ и ее производная $f'(x)$ определены для любого x .

На чертеже справа приведен график функции $f(x)$.

Дано, что функция $f(x)$ нечетная и у нее есть только одна точка минимума, координаты которой $(3, -6)$.

У функции $f(x)$ и ее производной $f'(x)$ есть горизонтальная асимптота $y = 0$.

- (1) Начертите возможный схематический график производной $f'(x)$.



Дана функция $g(x) = f^2(x) \cdot f'(x)$.

- (2) Найдите координаты точек пересечения графика функции $g(x)$ с осью x .
 (3) Вычислите площадь фигуры, ограниченной графиком функции $g(x)$ и осью x .

Раздел второй – последовательности и теория вероятности

2. Дана геометрическая прогрессия A , члены которой a_1, a_2, a_3, \dots и в которой m членов (m – натуральное число, большее, чем 4).

Дано: все члены прогрессии A являются отрицательными;

сумма $m - 4$ последних членов прогрессии – это умноженная на 16 сумма $m - 4$ первых членов этой прогрессии.

- (*) (1) Найдите знаменатель прогрессии A .
(2) Прогрессия A возрастает, убывает или не возрастает и не убывает? Обоснуйте свой ответ.

Продолжили прогрессию A так, что образовалась бесконечная геометрическая прогрессия.

Дана бесконечная прогрессия B , члены которой определены следующим образом: $b_n = \frac{k^n}{a_n}$ для любого натурального n . k – параметр, отличный от 0.

- (*) Докажите, что прогрессия B – геометрическая прогрессия, и выразите ее знаменатель при помощи k .

Дано, что сумма прогрессии B является сходящейся [סגולה].

- (*) Найдите возможную область значений k .

Дано: знаменатель прогрессии B равен $\frac{1}{4}$,
сумма прогрессии B равна -9 .

- (*) Найдите значение k и значение b_1 .

Из прогрессии B удалили каждый третий член ($b_3, b_6, b_9 \dots$).

- (*) Найдите сумму оставшихся членов.

3. В кувшине 'א есть 10 красных шаров и 15 желтых шаров, а в кувшине 'ב есть только красные шары.

Дана выбирает случайным образом кувшин и вынимает из него случайным образом шар.

Если этот шар желтый, она вынимает случайным образом второй шар из того же кувшина (без возвращения).

Если первый шар красный, она возвращает этот шар в кувшин и снова вынимает случайным образом шар из того же кувшина.

(א) Известно, что Дана вынула два шара одного и того же цвета. Какова вероятность того, что оба эти шара желтые?

Дана возвращает в кувшин шары, которые она вынула.

Яэль выполняет следующую последовательность действий:

она выбирает случайным образом кувшин, вынимает из него случайным образом один шар и возвращает его в тот же кувшин.

Яэль прекратит повторять эту последовательность действий после того, как она вынет красный шар и вернет его в кувшин.

(ב) Найдите вероятность того, что Яэль выполнила эту последовательность действий в точности 6 раз.

Часть шаров перенесли из кувшина 'ב в кувшин 'א.

После этого выбрали случайным образом кувшин и вынули из него случайным образом один шар.

Дано, что после переноса шаров вероятность того, что выбранный шар был красным, равна $\frac{19}{24}$.

(ג) Возможно ли, что до переноса в кувшине 'ב было 10 шаров? Обоснуйте свой ответ.

Раздел третий – геометрия и тригонометрия на плоскости

4. В четырехугольнике $BKCD$ сторона KB параллельна стороне CD .

Сторона CD – хорда в окружности, а сторона KB касается этой окружности в точке K .

Сторона BD пересекает эту окружность в точке A .

Диагональ BC пересекает хорду AK в точке E

(смотрите чертеж).

(⌘) Докажите, что $\triangle ABK \sim \triangle AKC$.

(⌘) Докажите, что $\frac{AB}{AC} = \frac{BE}{CE}$.

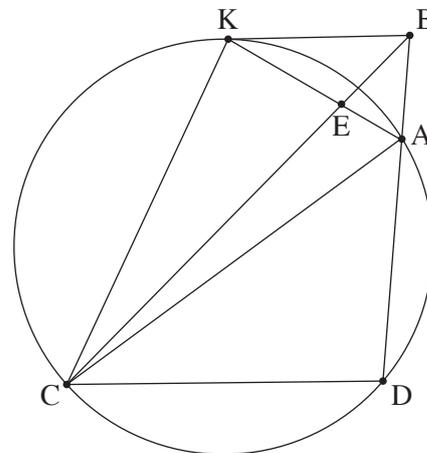
Дано: $BE = \frac{1}{4}CE$.

(⌘) Найдите отношение $\frac{AK}{AB}$.

Дано: площадь четырехугольника $ABKC$ равна 18.

Обозначим через S площадь треугольника AEB .

(⌘) Выразите при помощи S площадь треугольника KEC .



5. Дана окружность с центром O и радиусом R .

Из точки A провели две прямые AB и AC , касательные к этой окружности.

Точка E – точка касания прямой AC и окружности, как показано на чертеже.

Дано: $BO \perp AO$, $AE = CE$.

Обозначим через 2β угол BAC .

(⌘) Выразите при помощи R и β длину AB .

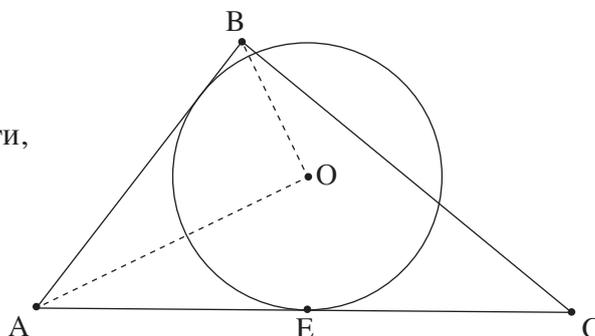
Дано, что длина AB равна $2.5R$, а угол BAC острый.

(⌘) Найдите значение β .

(⌘) Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника AOB .

Дано, что длина радиуса окружности, описанной вокруг треугольника ABC , равна 8.

(⌘) Найдите значение R .



Раздел четвертый – дифференциальное и интегральное исчисление полиномов, функций, содержащих корни, рациональных функций и тригонометрических функций

6. Дано, что $f'(x) = \frac{-4x}{(x^2 - a^2)^3}$ является производной функции $f(x)$. a – положительный параметр.

У функций $f(x)$ и $f'(x)$ одна и та же область определения.

В пунктах (а)–(г) выразите свои ответы при помощи a , если это необходимо.

(а) Найдите область определения производной $f'(x)$.

(б) Найдите области возрастания и убывания функции $f(x)$.

Дано, что у функции $f(x)$ есть горизонтальная асимптота, уравнение которой $y = 0$.

(в) Найдите функцию $f(x)$, для которой выполняются эти условия.

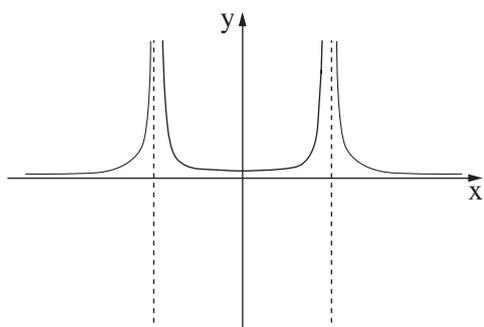
Даны функция $g(x) = \frac{x - a}{(x^2 - a^2)^2}$ и функция $h(x) = \frac{(x - a)^2}{(x^2 - a^2)^2}$.

У функций $f(x)$, $g(x)$ и $h(x)$ одна и та же область определения.

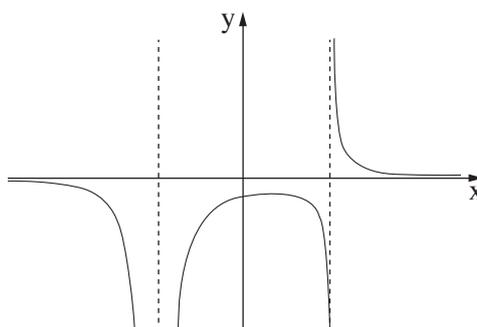
(г) Для каждой из функций $f(x)$, $g(x)$ и $h(x)$ найдите подходящий ей график из графиков I–IV, приведенных в конце вопроса. Обоснуйте свои ответы.

Дано, что у функции $h(x - 6)$ есть асимптота, уравнение которой $x = 0.25a$.

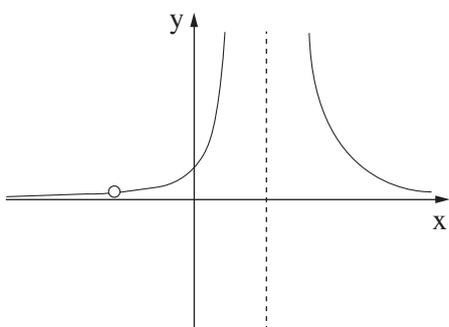
(д) Найдите значение a .



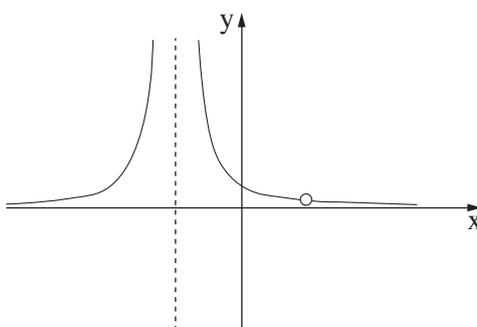
II



I



IV



III

7. Дана функция $f(x) = \cos x + \frac{2}{(\cos x)^2} + a$ в области $-\frac{3\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$.

a – параметр.

(а) Найдите область определения функции $f(x)$.

(б) Функция $f(x)$ четная или нечетная? Обоснуйте свой ответ.

Дано, что график функции $f(x)$ касается прямой $y = 2$ в двух точках.

(в) Найдите значение a .

Подставьте $a = 1$ и ответьте на вопросы пунктов (г)–(и).

(г) Найдите координаты точек экстремума функции $f(x)$ и определите их тип.

(д) Начертите схематический график функции $f(x)$.

Даны функция $g(x) = f(x) - k$ и функция $h(x) = \frac{1}{g(x)}$, обе в области $-\frac{3\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$.

k – параметр, $k \neq 2$, $k \neq 4$.

(е) Найдите значение k , для которого график функции $g(x)$ и график функции $h(x)$ пересекаются в каждой из точек их экстремума.

8. Дана функция $f(x) = x\sqrt{21-x}$.

(а) (1) Найдите область определения функции $f(x)$.

(2) Найдите области положительных и области отрицательных значений функции $f(x)$.

Известно, что у функции $f(x)$ есть одна точка внутреннего экстремума и нет точек перегиба.

(б) Начертите схематический график функции $f(x)$.

Точка A находится в первом квадранте на графике функции $f(x)$.

Точка C – точка пересечения графика функции $f(x)$ с положительной частью оси x .

Из точки A провели два перпендикуляра:

один перпендикуляр к оси x , который пересекает ее в точке B , а другой перпендикуляр к прямой $x = 21$, который пересекает ее в точке D .

(в) Найдите координаты точки A , для которой периметр прямоугольника $ABCD$ будет максимальным.

Желаем успеха!

Авторские права принадлежат Государству Израиль.
Копировать или публиковать можно только
с разрешения Министерства просвещения.

05

בהצלחה!

זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל.
אין להעתיק או לפרסם
אלא ברשות משרד החינוך.